Kompressible Strömungen

Kompressible Strömungen

bisher : dichtebeständige Fluide

im folgenden : dichteveränderliche bzw. kompressible Fluide

→ Gasdynamik

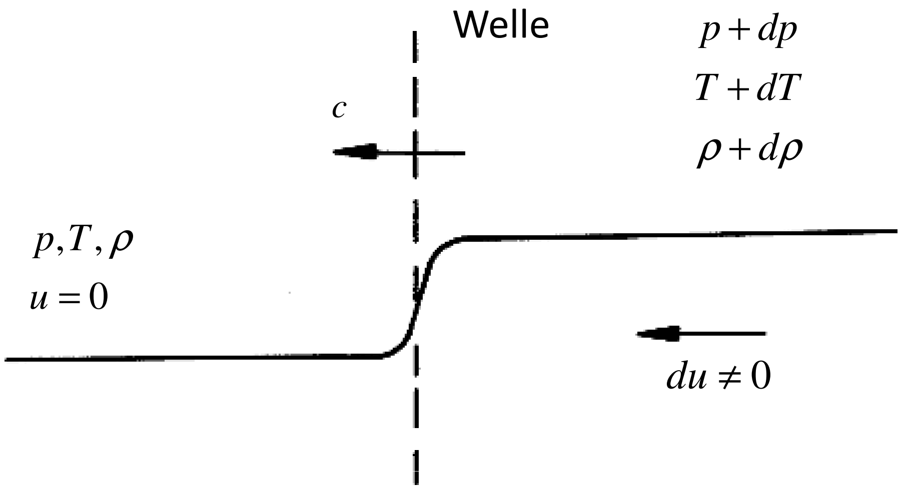
Beschränkung : stationäre, 1-D , reibungsfreie, kompressible Strömungen idealer Gase

Schallgeschwindigkeit

inkompressible Strömung : p-Störung überall, sofort messbar

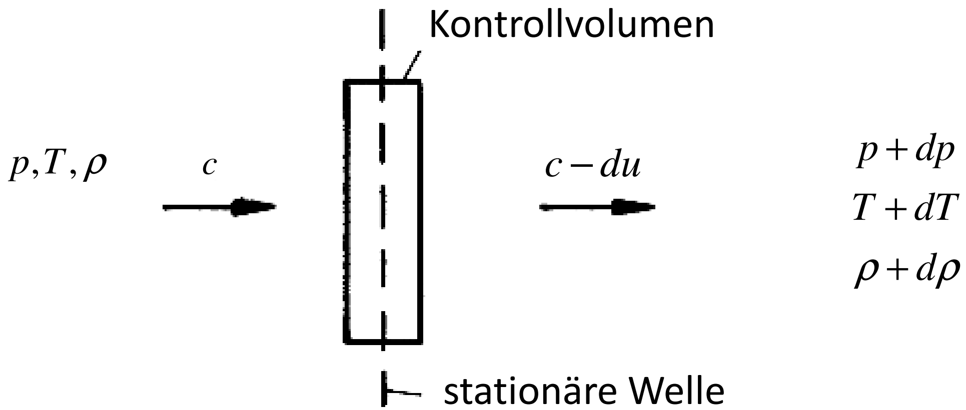
kompressible Strömung : p-Störung breitet sich als elastische Welle aus akustische oder Schallwelle : Wellen mit infinitesimaler Amplitude

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit :



instat. Problem für den ruhenden Beobachter

stat. Problem durch Überlagerung mit Geschwindigkeit c in entgegengesetzter Richtung



$\dot{m}$ über die Fläche A des Kontrollvolumens

$$A\rho c = A(\rho + d\rho)(c - du)$$
$$= A\rho c + Acd\rho - A\rho du$$
$$\underbrace{- Ad\rho du}_{\text{vernachlässigbar}}$$

$$\longrightarrow \qquad du = c\frac{d\rho}{\rho}$$

Kompression : $d\rho > 0 \quad \rightarrow \quad du > 0$

Expansion : $d\rho < 0 \quad \rightarrow \quad du < 0$

Impuls : $A\rho c(c - du) - A\rho cc = pA - (p + dp)A$

$$dp = \rho c du$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c^2 = \frac{dp}{d\rho}}$$

Amplitude der Welle ist infinites. $\Longrightarrow$ isentrope Zustandsänderung der Teilchen

$$\longrightarrow \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=konst.}$$

+ Isentropenbeziehung : $p/\rho^\gamma = konst.$

+ Gasgleichung : $p = \rho RT$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=konst.} = \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma}\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho}\gamma = \gamma RT$$

bzw.

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}$$

Luft , *15 °C, c = 340 m/s*

Luft , *20 °C, c = 343 m/s*

Kompressibilitätseffekte von Bedeutung ?

Antwort mittels $M = \frac{u}{c}$

Kontinuitätsgleichung (1D) :

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

inkompressibel, sofern

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} << \rho \frac{\partial u}{\partial x}$$

bzw.

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} << \frac{\Delta u}{u}$$

Schallgeschwindigkeit :

$$\Delta p \approx c^2 \Delta \rho$$

Euler (1D) :

$$u \Delta u \approx \frac{\Delta p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{u^2}{c^2}\frac{\Delta u}{u} = M^2 \frac{\Delta u}{u}$$

D.h. : $M^2 << 1$ $\quad$, d.h. $\dfrac{\Delta\rho}{\rho}$ sehr klein

inkompressibel : $M \leq 0.3$

kompressibel : $M > 0.3$

Einteilung kompressibler Strömungen :

$0.3 < M < 1$: subsonische Strömung

$0.8 < M < 1.2$: transonische Strömung

$1 < M < 3$: supersonische Strömung

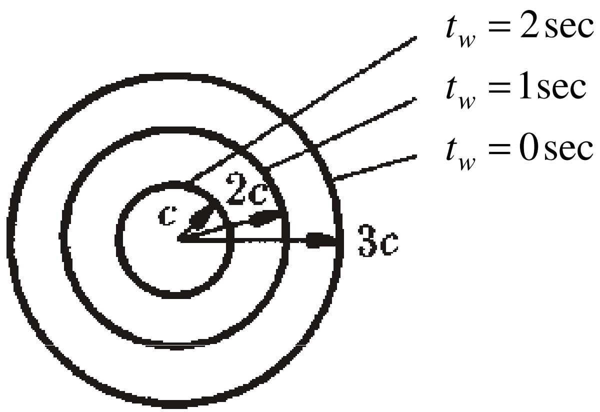
$M > 3$: hypersonische Strömung

Sofern $M > 1$ ist das Ausbreitungsgebiet von Strömungen begrenzt.

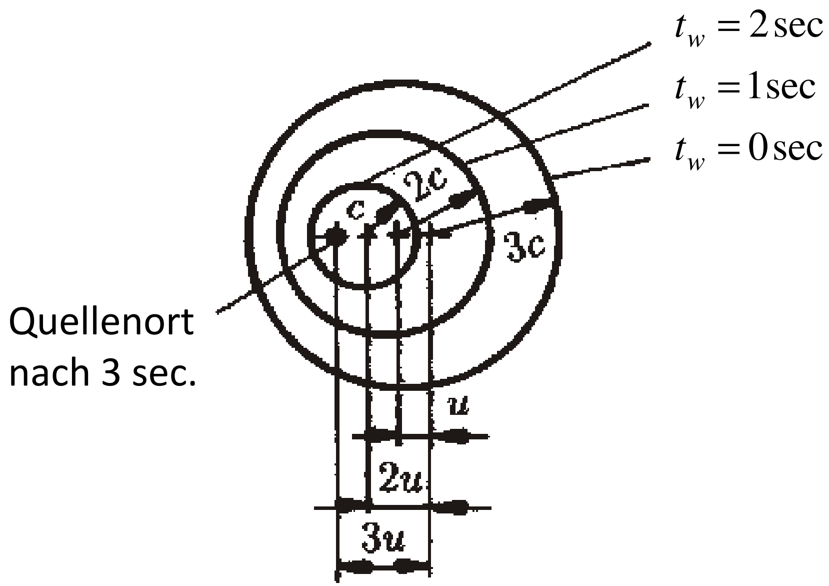
→ Machkegel

Druckwelle wird bei $t = t_w$ initiiert

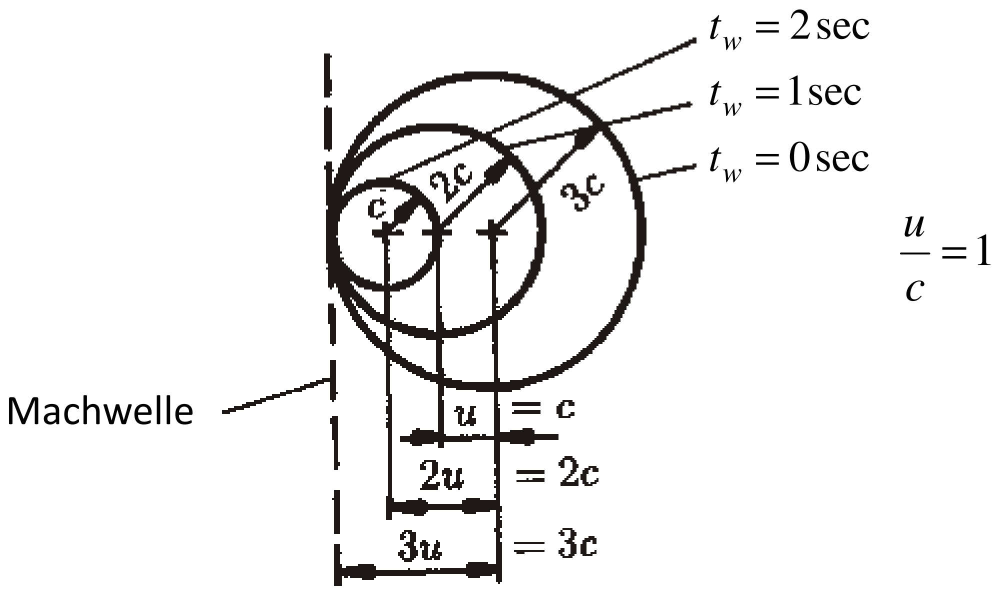
Radius $r = (t - t_w)c$



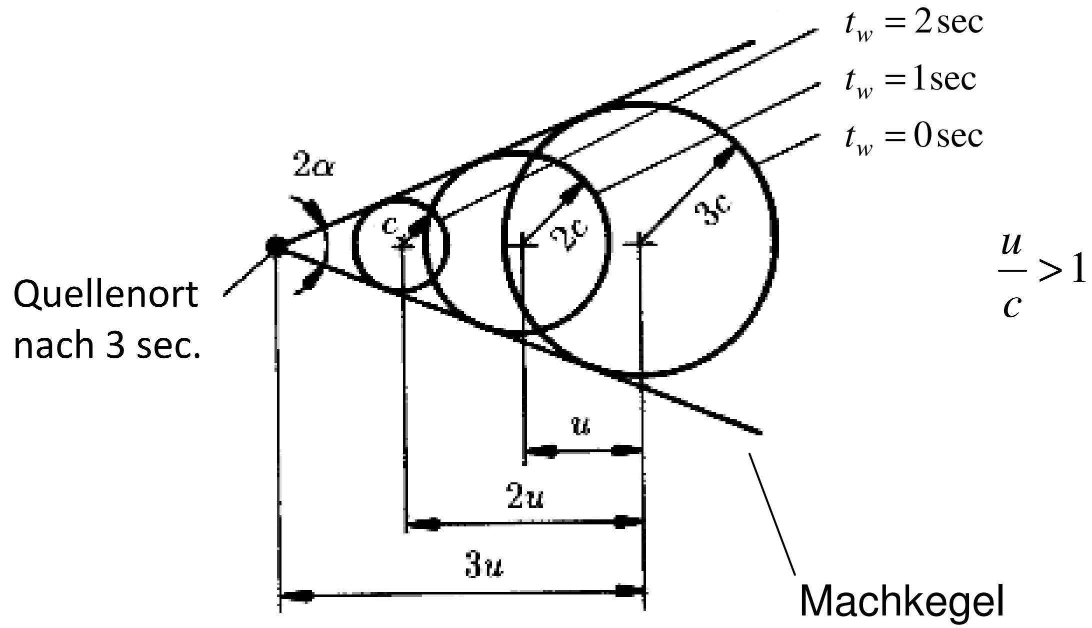
$u = 0$



$\frac{u}{c} < 1$



$t_w = 2\,\mathrm{sec}$
$t_w = 1\,\mathrm{sec}$
$t_w = 0\,\mathrm{sec}$
c
2c
3c
$\frac{u}{c} = 1$
Machwelle
$u = c$
$2u = 2c$
$3u = 3c$

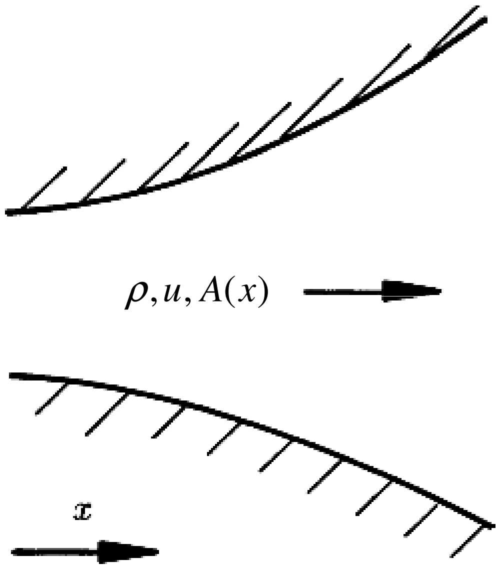


$t_w = 2\,\mathrm{sec}$
$t_w = 1\,\mathrm{sec}$
$t_w = 0\,\mathrm{sec}$
2α
c
2c
3c
$\frac{u}{c} > 1$
Quellenort
nach 3 sec.
u
2u
3u
Machkegel

Öffnungswinkel des Machkegels

$$\sin\alpha = \frac{c}{u} = \frac{1}{M}$$

Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung



isentrope Strömung durch ein Rohr

Kontinuitätsgleichung :

$$\dot{m} = \rho u A = konst.$$

Differentiation

$$\frac{d(\rho uA)}{\rho uA} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

Euler (1D) :

$$u\ du = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -c^2\frac{d\rho}{\rho}$$

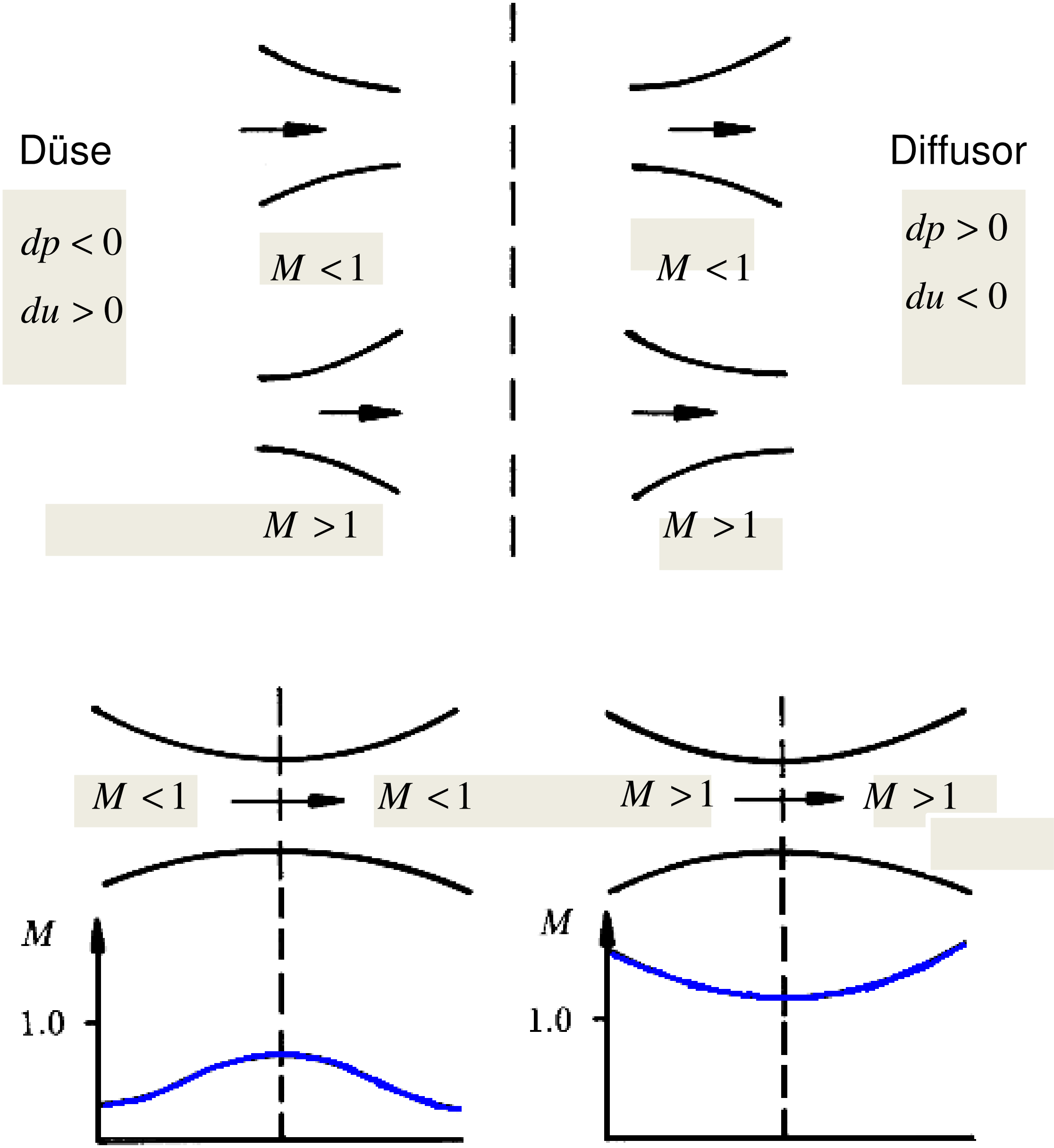
$$\Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -M^2\frac{du}{u} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u^2}{c^2}\frac{du}{u}$$

bzw.

$$\boxed{\frac{du}{u} = -\frac{dA}{A}\frac{1}{1-M^2}}$$

Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung

Daraus folgen interessante Konsequenzen der Kompressibilität bezüglich der Auswirkungen von Änderungen von $A(x)$ auf $u(x)$.


Düse
$dp < 0$
$du > 0$
$M < 1$
$M > 1$
Diffusor
$dp > 0$
$du < 0$
$M < 1$
$M > 1$
$M < 1$
$M < 1$
$M > 1$
$M > 1$
M
1.0
M
1.0

Ruhe- und kritische Größen

Ruhezustand : isentrope Verzögerung auf $\vec{v}=0$ dient als Referenzzustand

Energiegleichung im Ruhezustand :

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2}$$

ideales Gas : $h = c_p T$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2 c_p T} = 1 + \frac{u^2}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma R T}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{T_0}{T} = f(M)$$

Isentropenbeziehungen →

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = g(M)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = l(M)$$

in adiabater Strömung $\left\{h+\frac{u^2}{2}=konst.\right\}$ gilt für die Ruhegrößen

$$h_0 = konst. \quad , \quad T_0 = konst.$$

$$c_0 = \sqrt{\gamma R T_0} = konst.$$

Beziehung zwischen u und p : $\quad c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$

$$u^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} R T_0 \left(1-\frac{T}{T_0}\right)$$

$$u = \left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Vakuum : $p \to 0 \quad \Rightarrow \quad u \to u_{\max}$

$$u_{\max} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Machzahl als *f(p)* :

$$M = \left(\frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^2}{\gamma R T} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^2}{\gamma\, p / \rho} \right)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$p \to 0 \quad : \quad M \to \infty$$

konvergent-divergente Düse : bei geeignetem Gegendruck erhält man

$$M = 1$$

im Halsquerschnitt. Zustand ($M = 1$) wird als kritischer Zustand bezeichnet.

Für den kritischen Zustand, ebenfalls ein Referenzzustand, ergibt sich

$$c_p T_0 = c_p T^* + \frac{\gamma R T^*}{2} \quad ; \quad (\gamma = 1.4)$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.833$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.634$$

Beziehung $A^* / A = f(M, \gamma)$ mittels Kontinuitätsgleichung

$$\rho u A = \rho^* u^* A^*$$

$$\frac{A^*}{A} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{u}{u^*}$$

$$\frac{A^*}{A} = \underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{f(M)} \underbrace{\frac{\rho_0}{\rho^*}}_{f(\gamma)} \frac{u}{c} \underbrace{\frac{c}{c_0}}_{f(M)} \underbrace{\frac{c_0}{u^*}}_{f(\gamma)}$$

mit

$$\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho^*}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{c}{c_0}\frac{c_0}{u^*}=\left(\frac{T}{T_0}\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{A^*}{A}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}=f(M,\gamma)$$

mit

$$\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

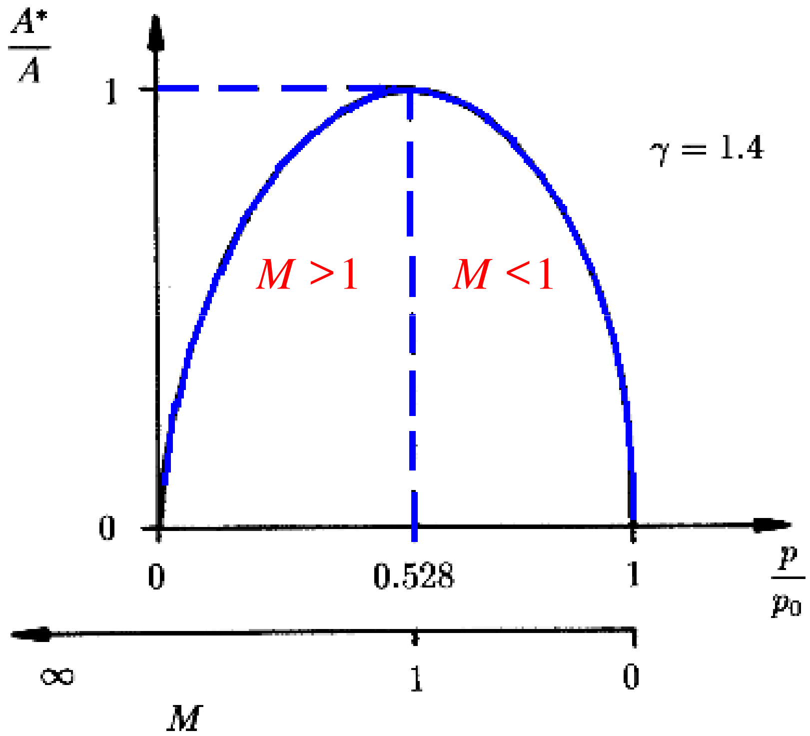
$$\frac{\rho_0}{\rho^*}\left(\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

$$M=\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A^*}{A}=\frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]^{\frac{1}{2}}}=f\left(\gamma,\frac{p}{p_0}\right)$$

$$A^*/A \to 0 \quad \textit{für} \;\; M \to 0 \quad \textit{bzw.} \quad p/p_0 \to 1$$
$$M \to \infty \qquad\qquad p/p_0 \to 0$$

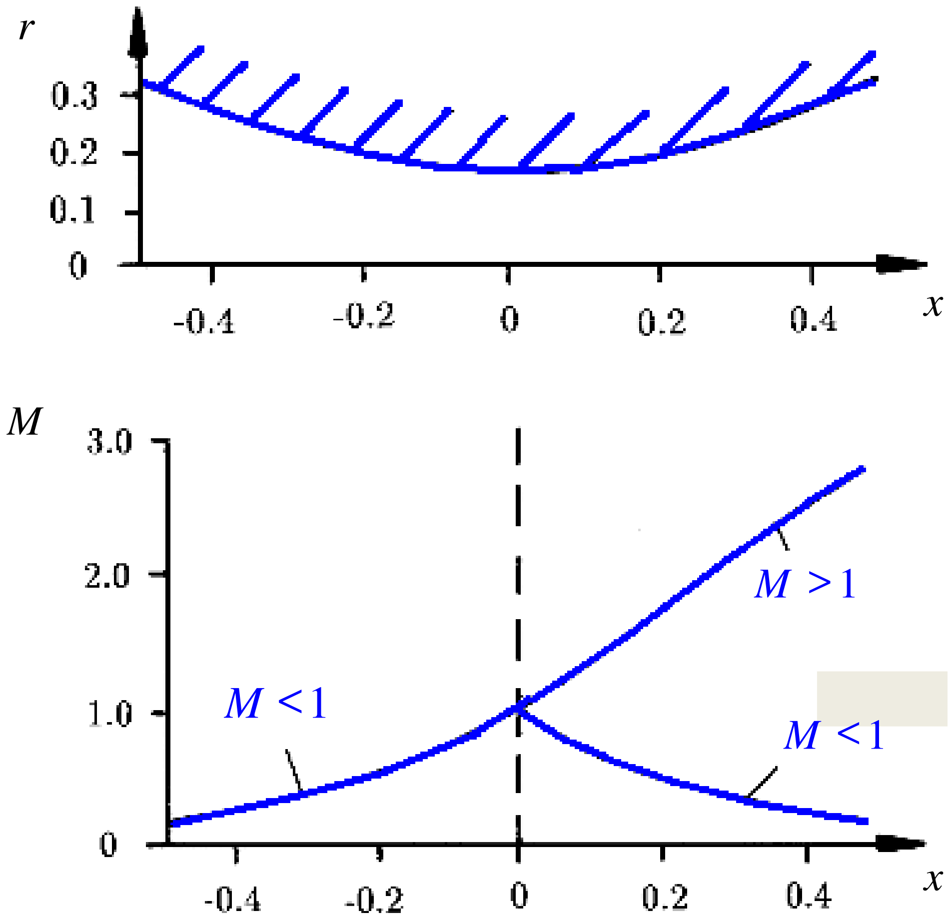
$$A^*/A \to 1 \quad \textit{für} \;\; M \to 1 \quad \textit{bzw.} \quad p/p_0 \to 0.528$$

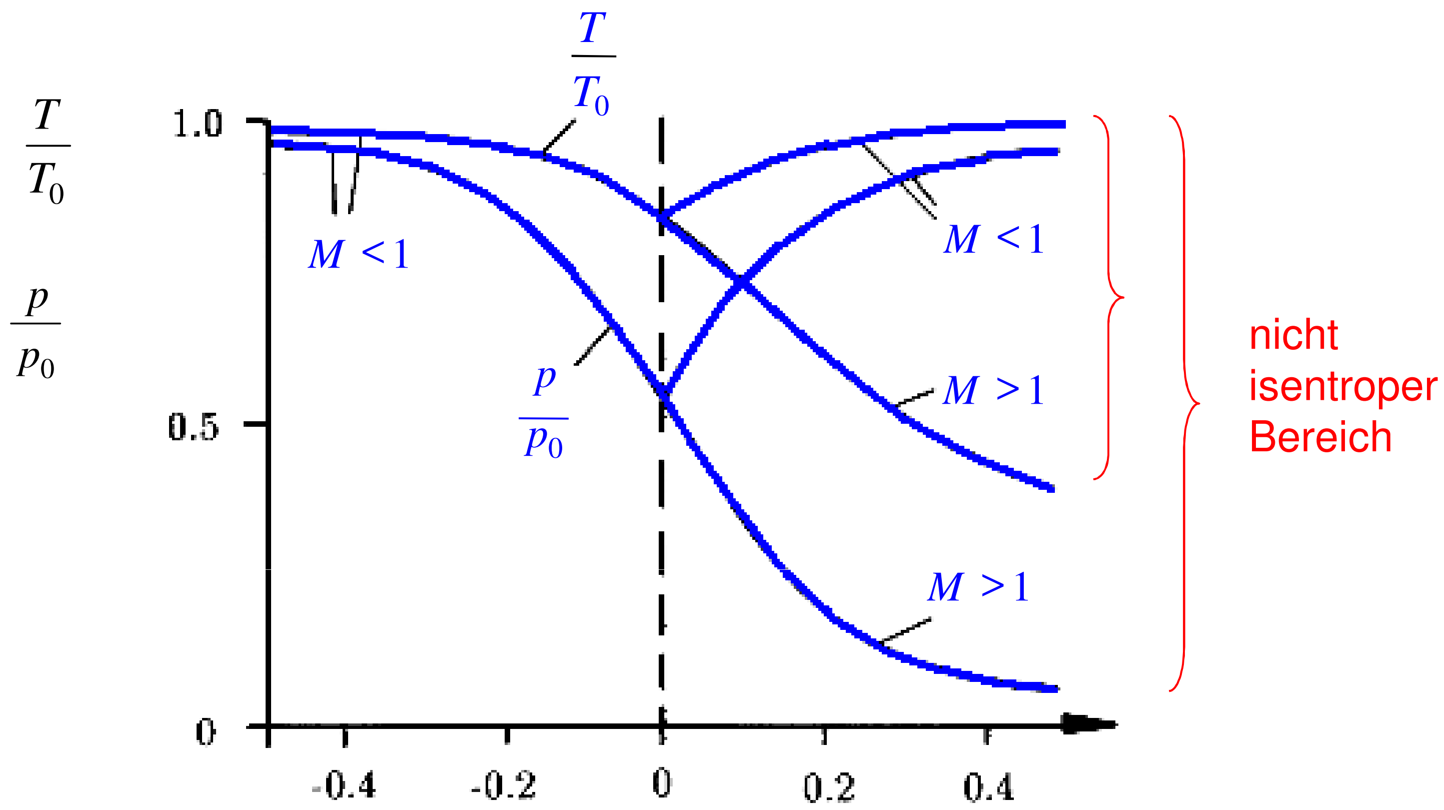


kritische Variable sind Referenzgrößen, wenn $M = 1$ Zustand isentrop erreicht wird.

$$A^*/A \text{ bekannt} \quad \rightarrow \quad M, \frac{p}{p_0}, \frac{T}{T_0} \quad \text{Verlauf}$$

z. Bsp. : $$r = \left[\left(0.1 + x^2\right)/\pi\right]^{\frac{1}{2}}$$





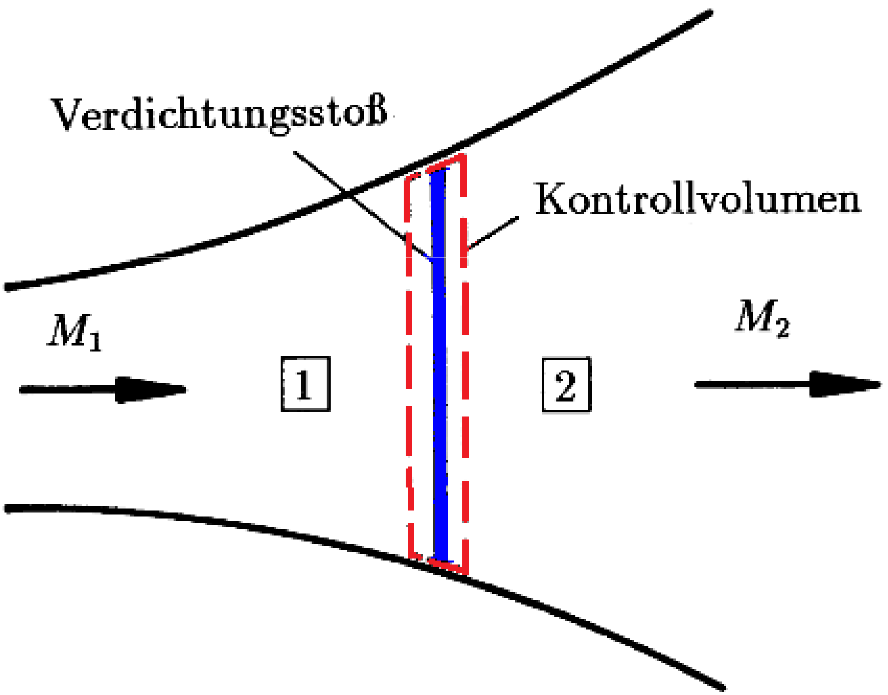
T/T0
p/p0
1.0
0.5
0
T/T0
M <1
p/p0
M <1
M >1
M >1
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
nicht
isentroper
Bereich

Der senkrechte Verdichtungsstoß

Verdichtungsstoß oder Stoßwelle ist eine Diskontinuität endl. Stärke ;

über diesen Stoß sind die Isentropenbeziehungen ungültig.

Zustände vor und hinter dem Stoß :



Gesucht : $\frac{u_2}{u_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{p_2}{p_1}, \frac{T_2}{T_1}$ etc. !

Masse- , Impuls- und Energieerhaltungsgleichung ($dA \approx 0$)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Impuls :

$$u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = \frac{c_1^2}{\gamma u_1} - \frac{c_2^2}{\gamma u_2}$$

$$\gamma(u_2 - u_1) = \left(\frac{c_1}{u_1}\right)^2 u_1 - \left(\frac{c_2}{u_2}\right)^2 u_2 \qquad (*)$$

Referenzzustand → * -Zustand :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = c^{*2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{2} = c_p T^* + \frac{c^{*2}}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{c^*}{u}\right)^2 = \left[\left(\frac{c}{u}\right)^2 + \frac{\gamma-1}{2}\right]\frac{2}{\gamma+1}$$

$$\left(\frac{u}{c^*}\right)^2 = M^{*2} = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)+\frac{2}{M^2}} \qquad M^* = f(M, \gamma)$$

$$M = 0 \quad : \quad M^* = 0$$

$$M = 1 \quad : \quad M^* = 1$$

$$M \to \infty \quad : \quad \lim_{M \to \infty} M^{*^2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

$$M < 1 \quad : \quad M^* < 1$$

$$M > 1 \quad : \quad M^* > 1$$

$\dfrac{c}{u} = f\left(\dfrac{c^*}{u}, \gamma\right)$ in Gleichung (*)

$$\Rightarrow \; (u_2 - u_1)\frac{\gamma + 1}{2} = c^{*2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)\frac{\gamma + 1}{2}$$

$$c^{*^2} = u_1 u_2$$

$$\boxed{M_1^* M_2^* = 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{c^{*2}} = M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} = f(M_1,\gamma)$$

Impuls :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1+\gamma M_1^2\left(1-\frac{u_2}{u_1}\right)$$

$$= 1+\gamma M_1^2\left(1-\frac{(\gamma-1)+\frac{2}{M_1^2}}{\gamma+1}\right)$$

$$= 1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1)$$

$$= g(M_1,\gamma)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{M_1^2+1}{M_1^2}\left(M_1^2-1\right) = h(M_1,\gamma)$$

$$M_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)} = \varphi(M_1,\gamma)$$

sog. Rankine–Hugoniot Beziehungen

Entropieänderung = $f(M_1,\gamma)$:

$$T\,ds = dh - \frac{1}{\rho}dp$$

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \frac{c_p}{R}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \ln\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]$$

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \ln\left\{\left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\right\}$$

$$= f(M_1,\gamma)$$

$s_2 - s_1 > 0$: d. h. Stöße nur in superson. Strömungen.

weiterhin :

$$s_2 - s_1 = s_{0_2} - s_{0_1} = c_p \ln\left(\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}}\right) - R\ln\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right)$$

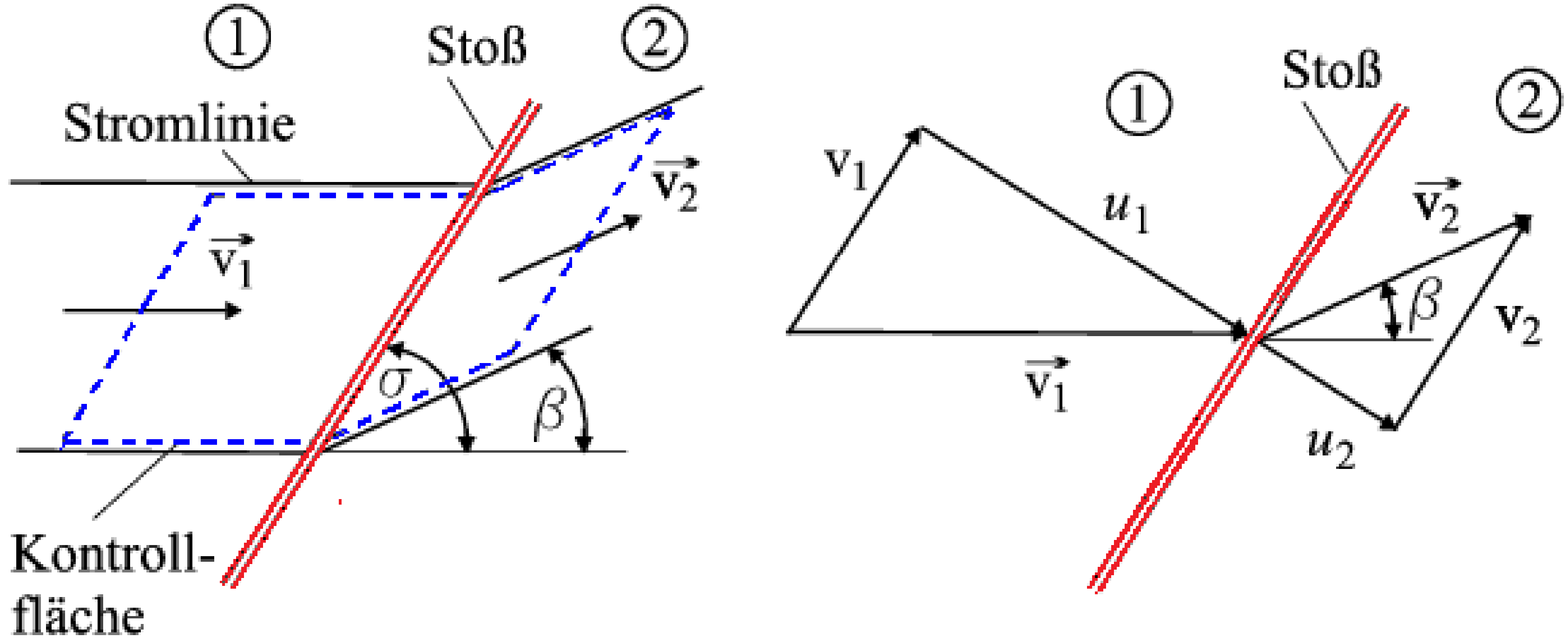
mit $T_0 = konst :$ $p_{02} < p_{01}$

bzw. $\rho_{02} < \rho_{01}$

Schräger Verdichtungsstoß

Im allgemeinen sind Verdichtungsstöße gegenüber der Anströmung geneigt

→ der senkrechte Verdichtungsstoß ist ein Sonderfall



σ : Stoßwinkel

β : Umlenkwinkel

Formulierung der Erhaltungsgleichungen über den Stoß

Kontinuitätsgleichung : $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

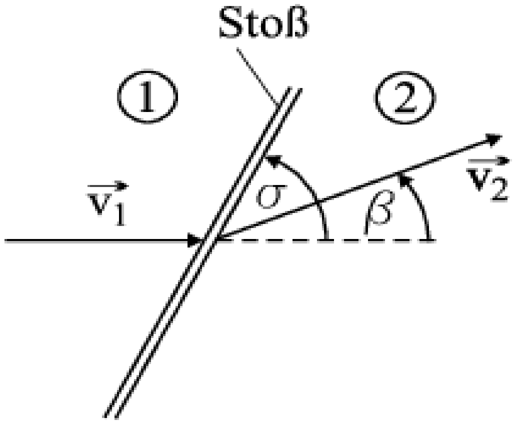
Impulssatz, tangential : $\rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2$

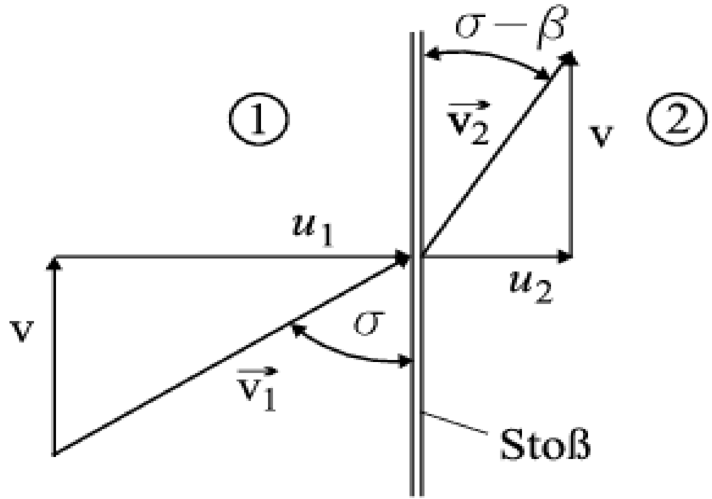
Impulssatz, normal : $\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$

Energiesatz : $\frac{\|\vec{v}_2\|^2}{2} - \frac{\|\vec{v}_1\|^2}{2} = c_p \left(T_1 - T_2 \right)$

Impulssatz, tangential : $\Rightarrow v_1 = v_2 = v\,!$

$\longrightarrow$ Überlagerung des v-Feldes möglich





Analyse wie beim senkrechten Verdichtungsstoß :

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{u_1^2 + v^2} \qquad \sigma = \tan^{-1}(u_1 / v)$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{u_2^2 + v^2} \qquad \sigma - \beta = \tan^{-1}(u_2 / v)$$

$! \, u_2 < u_1 \Rightarrow$ Umlenkung der Strömung in Richtung des Stoßes !

Mach Zahlen senkrecht zum Stoß

$$M_{n1} = u_1 / c_1 = M_1 \sin\sigma > 1$$

$$M_{n2} = u_2 / c_2 = M_2 \sin(\sigma - \beta) < 1$$

$\dfrac{p_2}{p_1}, \dfrac{\rho_2}{\rho_1}, \dfrac{T_2}{T_1}, \dfrac{\Delta S}{R}$ durch $\quad M_1 \leftarrow M_{n1} = M_1 \sin\sigma$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\sigma - 1\right)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2\sigma}{(\gamma-1) M_1^2 \sin^2\sigma + 2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\tan\sigma}{\tan(\sigma-\beta)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\gamma M_1^2 \sin^2\sigma + 1}{M_1^2 \sin^2\sigma}\left(M_1^2 \sin^2\sigma - 1\right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = \ln\left\{\left[\frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2\sigma}{(\gamma-1) M_1^2 \sin^2\sigma + 2}\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\sigma - 1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\right\}$$

die Prandtl Beziehung des senkrechten Verdichtungsstoßes

$$u_1 u_2 = c^{*2}$$

nimmt für den schrägen Verdichtungsstoß folgende Form an :

Energiesatz : $$c_p T_1 + \frac{u_1^2 + v^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2 + v^2}{2} = c_p T_0$$

mit $$c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2 + v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2 + v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

Ruhe- und kritische Größen : $$c^{*2}\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = c_0^2 \frac{1}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

$\Rightarrow$

$$p_1 = \rho_1 \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} c^{*2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(u_1^2 + v_1^2\right) \right]$$

$$p_2 = \rho_2 \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} c^{*2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(u_2^2 + v_1^2\right) \right]$$

in Impulssatz, normal

$$\rho_1\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(u_1^2+c^{*2}\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma}v^2\right]=\rho_2\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(u_2^2+c^{*2}\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma}v^2\right]$$

+ Kontinuitätsgleichung $\Longrightarrow$ Prandtl Beziehung für den schrägen Verdichtungsstoß.

$$u_2u_1=c^{*2}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v^2$$

$M_2=f(M_1,\sigma,\beta,\gamma)$ aus $M_2=g(M_1,\gamma)$

mittels $M_1 \leftarrow M_1 \sin\sigma$ und

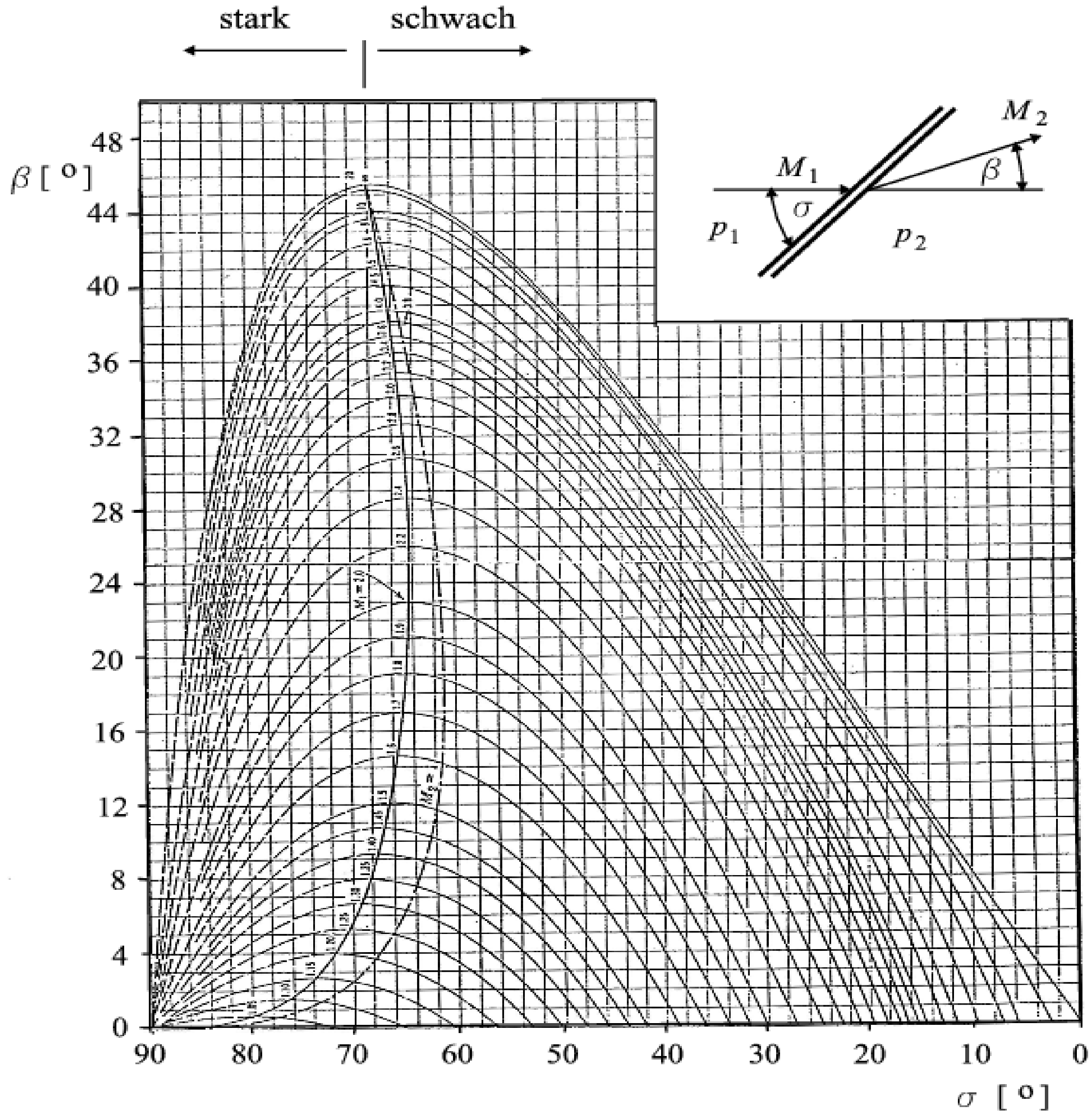
$M_2 \leftarrow M_2 \sin(\sigma-\beta)$

$$\longrightarrow \quad M_2^2\sin^2(\sigma-\beta)=\frac{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\sigma+2}{2\gamma M_1^2\sin^2\sigma-(\gamma-1)}$$

Zusammenhang zwischen β, σ, M_1 mittels $\frac{\rho_2}{\rho_1} = f(M_1, \sigma) = g(\sigma, \beta)$

mit $\tan(\sigma - \beta) = \frac{\tan\sigma - \tan\beta}{1 + \tan\sigma \; \tan\beta}$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta = 2\cot\sigma \frac{M_1^2 \sin^2\sigma - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\sigma) + 2}$$



stark
schwach
β [o]
σ [o]
M_1
M_2
σ
β
p_1
p_2
48
44
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma = \dfrac{\pi}{2} & \rightarrow & \tan\beta = 0 \\ \sigma = \alpha_1 = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{M_1}\right) & \rightarrow & \tan\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Max. existiert !

Analyse für $M_1 \rightarrow \infty$:

$$r = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} (\tan\beta) = \frac{2\cot\sigma \sin^2\sigma}{\gamma + \cos^2\sigma} = \frac{\sin 2\sigma}{\gamma + \cos 2\sigma}$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{2\cos 2\sigma(\gamma + \cos 2\sigma) + 2\sin^2 2\sigma}{(\gamma + \cos 2\sigma)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

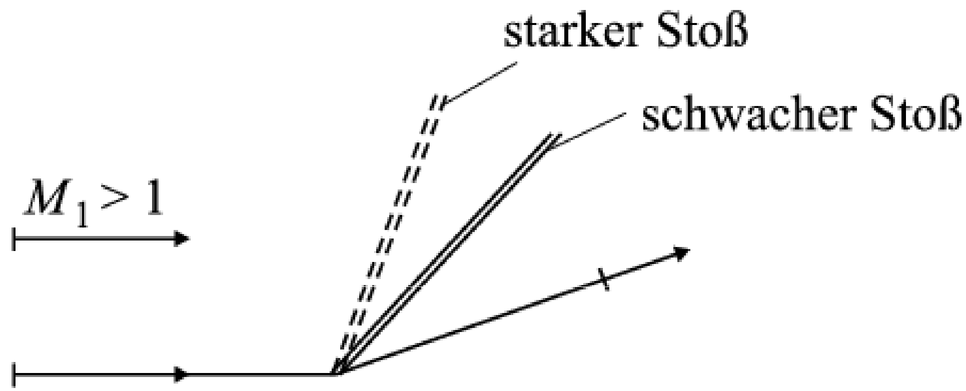
$$\Rightarrow \cos 2\sigma = -\frac{1}{\gamma}\,;\ \gamma = 1.4 : \sigma \approx 67.5$$

$$\tan\beta_{\max} = \frac{\sin 2\sigma}{\gamma + \cos 2\sigma} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 2\sigma}}{\gamma + \cos 2\sigma} = \frac{\sqrt{1-1/\gamma^2}}{\gamma - 1/\gamma} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 1} = (\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta_{\max} \approx 45°$$

$\beta < \beta_{\max}$: 2 Lösungen

- schwache Lösung , $M_2 > 1\,(i.a.)$
- starke Lösung , $M_2 < 1$

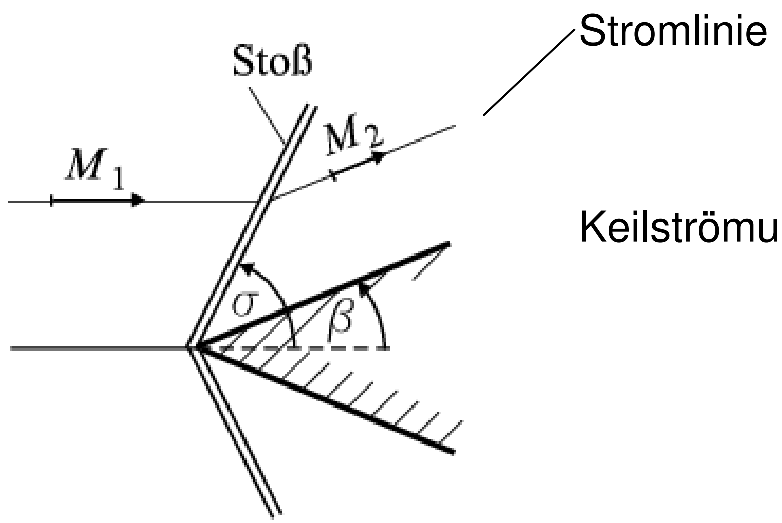


schwache Lösung entspricht der natürlichen Lösung

$\beta > \beta_{\max}$: keine geschlossene analytische Lösung

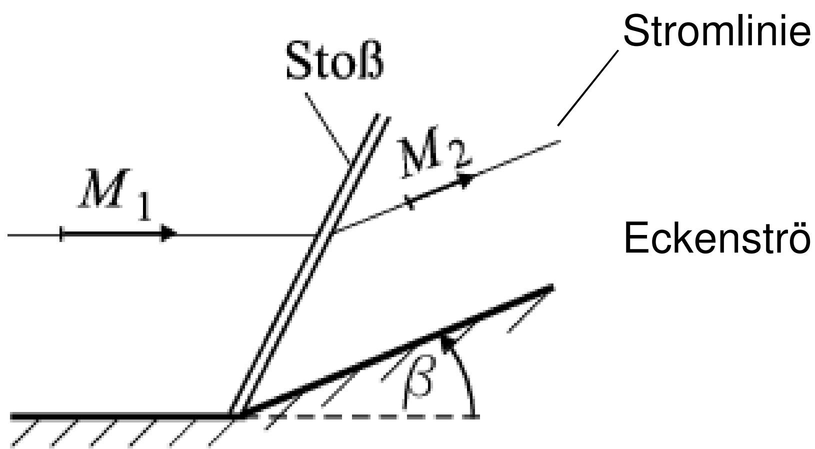
Entstehung von schrägen Verdichtungsstößen

$M_1 > 1$

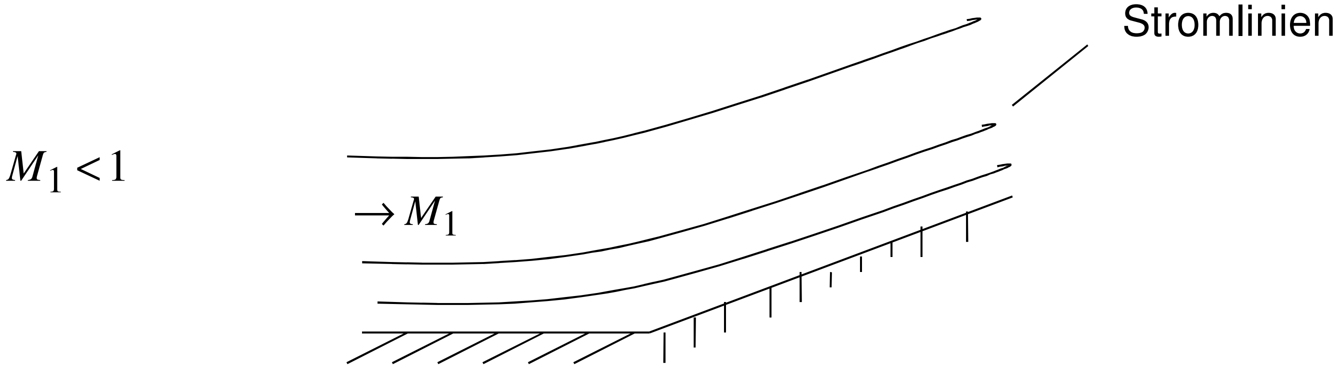


Keilströmung : $\beta < \beta_{\max}$

$M_1 > 1$

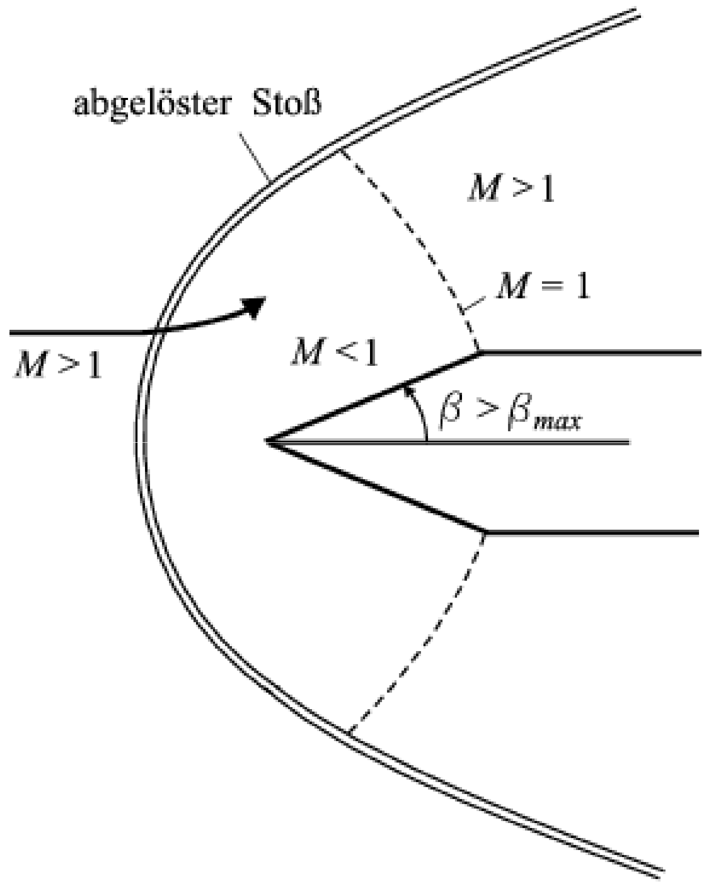


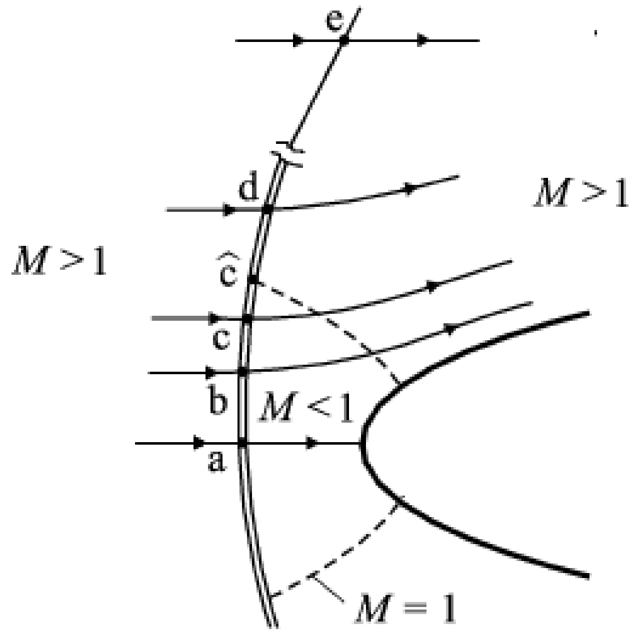
Eckenströmung (konkav) : $\beta < \beta_{\max}$



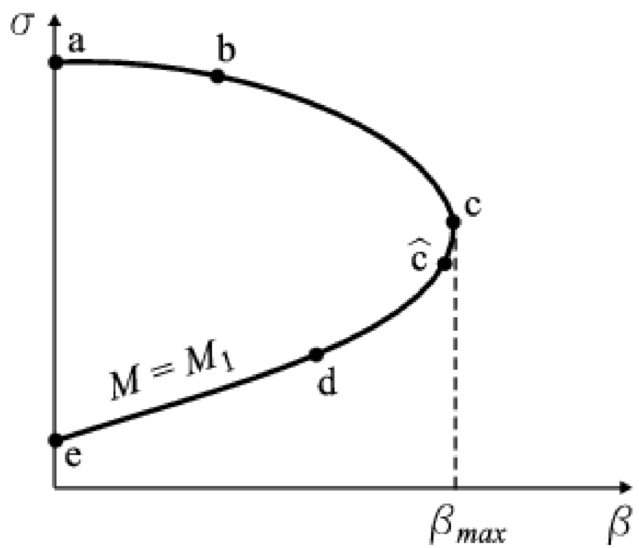
Eckenströmung (konkav, subsonisch)

$\beta > \beta_{\max}$:   Ablösung des Verdichtungsstoßes





abgelöster Verdichtungsstoß



σ, β, M_1 - Zusammenhang

Herzkurve

Approximationen für schräge Verdichtungsstöße

- Hyperschallströmungen : $M_1^2 \sin^2 \sigma \gg 1 , \quad \sin \sigma \ll 1$

aus

$$\frac{\tan(\sigma-\beta)}{\tan\sigma} = \frac{\gamma - 1 + 2/M_1^2 \sin^2\sigma}{\gamma+1}$$

und $\sigma \approx \beta$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sigma-\beta}{\sigma} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2}\beta \qquad \text{Newton-Theorie}$$

- Näherung für schwache Stöße : Annahme : β klein

$$\beta \to 0 : \quad \Rightarrow \quad \sigma \to \alpha_1 = \sin^{-1}(1/M_1)$$

in $\beta = f(M_1, \sigma)$

$$\Rightarrow \qquad \tan\beta \approx 2\cot\alpha_1 \frac{M_1^2 \sin^2\sigma - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\alpha_1) + 2}$$

mit $\tan\beta \approx \beta$

$$\cot\alpha_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

$$\cos 2\alpha_1 = 1 - 2\sin^2\alpha_1 = 1 - 2/M_1^2$$

$\Rightarrow$ $$M_1^2 \sin^2\sigma - 1 \approx \frac{M_1^2(\gamma+1)}{2\sqrt{M_1^2 - 1}}\beta$$

in $$\frac{p_2}{p_1} = h(M_1, \sigma)$$

$\Rightarrow$ relative Druckänderung für β klein

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}\beta$$

gültig : schwache Komp. + Exp.wellen

Grund :
$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{p_1}\right)^3 = \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\left(\frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}\right)^3 \beta^3$$

$\Rightarrow$ schwache Stöße näherungsweise isentrop → reversibel