

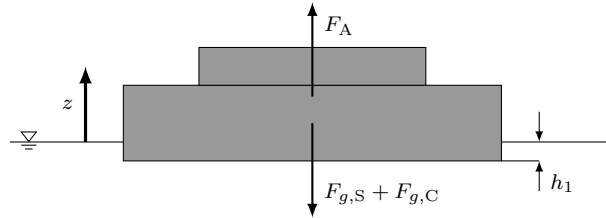
.....
(Matrikelnummer, Unterschrift)

Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik I“

16. 03. 2026

1. Aufgabe

- a) Statische globale Impulsbilanz (Kräftegleichgewicht = KGG) in z -Richtung mit Auftriebskraft F_A , Gewichtskraft des Containers $F_{g,C}$ und die Gewichtskraft des Schiffs $F_{g,S}$: $\sum_i F_{z,i} \stackrel{!}{=} 0$



$$\sum_i F_{z,i} = F_A - F_{g,C} - F_{g,S} \stackrel{!}{=} 0$$

Kräfte:

Auftriebskraft

$$F_A = \rho_W g h_1 A_S$$

Gewichtskräfte

$$F_{g,C} + F_{g,S} = (m_S + m_C)g$$

Damit folgt aus der statischen Impulsbilanz:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_W g h_1 A_S - (m_S + m_C)g &= 0 \\ \Rightarrow h_1 &= \frac{m_S + m_C}{\rho_W A_S} \end{aligned}$$

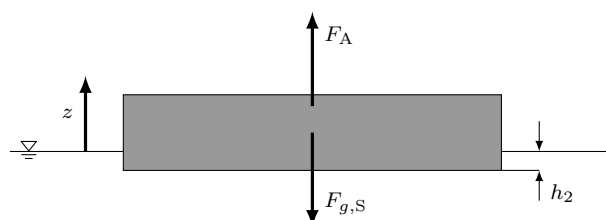
- b) Volumen-/Massenerhaltung bzw. Kontinuitätsgleichung: Konstantes Wasservolumen

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \Rightarrow A_B H_1 - A_S h_1 &= A_B H_2 - A_C H_C - A_S h_2 \\ \Rightarrow H_2 = H(h_2) &= H_1 - \frac{A_S}{A_B} h_1 + \frac{A_S}{A_B} h_2 + \frac{A_C}{A_B} H_C \end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt, wie allgemein der neue Wasserstand H_i durch die Eintauchtiefe h_i des Schiffes beeinflusst wird. In Teilaufgabe e) wird dieses Teilergebnis erneut für eine andere Höhe h_i verwendet:

$$H(h_i) = H_1 - \frac{A_S}{A_B} h_1 + \frac{A_S}{A_B} h_i + \frac{A_C}{A_B} H_C \quad (1)$$

Statische globale Impulsbilanz/Kräftegleichgewicht am Schiff in z -Richtung: $\sum_i F_{z,i} \stackrel{!}{=} 0$



$$\begin{aligned}\sum_i F_{z,i} &= F_A - F_{g,S} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \rho_W g h_2 A_S - m_S g &= 0 \\ \Rightarrow h_2 &= \frac{m_S}{\rho_W A_S}\end{aligned}$$

Einsetzen von h_1 und h_2 in $H_2(h_2)$:

$$\Rightarrow H_2 = H_1 - \frac{m_C}{\rho_W A_B} + \frac{A_C}{A_B} H_C$$

c) Quantitative Begründung:

Bei konstanter Dichte ρ_i und konstanter Gravitation g errechnet sich der Auftrieb eines vollständig mit einem Fluid i benetzten Körper über den Auftriebssatz nach Archimedes aus dem verdrängten Fluidvolumen V :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{A,i} &= -\rho_i V \vec{g} & || \cdot || \\ \Rightarrow F_{A,i} &= \rho_i V g\end{aligned}$$

Insofern die Auftriebskraft der Luft (L) gegenüber der Auftriebskraft im Wasser (W) nicht für das gleiche Volumen vernachlässigt werden kann, gilt mit $\rho_W, g \neq 0$:

$$\Rightarrow \frac{F_{A,L}}{F_{A,W}} = \frac{\rho_L}{\rho_W} \neq 0$$

Die hydrostatische Grundgleichung (Impulsbilanz) in differentieller Form innerhalb einer Fluidphase i lautet:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} p_i &= \rho_i \vec{g} & | \cdot \vec{e}_z \\ \Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial z} &= -\rho_i g\end{aligned}$$

Damit folgt für die Druckgradientenverhältnisse in Luft (L) und Wasser (W) mit $\frac{\partial p_W}{\partial z} \neq 0$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\frac{\partial p_L}{\partial z}}{\frac{\partial p_W}{\partial z}} &= \frac{\rho_L}{\rho_W} \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial p_L}{\partial z} &= \frac{\partial p_W}{\partial z} \frac{\rho_L}{\rho_W} \neq 0 \\ \Rightarrow p_L(z) &= p_a(z) \neq \text{const}_z\end{aligned}$$

Somit kann der Umgebungsdruck p_a als Druck in der Luftatmosphäre nicht konstant über die Höhenkoordinate z sein, insofern der Auftrieb in der Luft gegenüber im Wasser berücksichtigt wird.

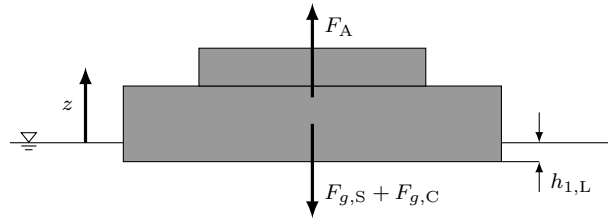
Qualitative Begründung:

Insofern der Auftrieb in der Luft gegenüber dem Auftrieb im Wasser berücksichtigt wird, muss sich eine von Null verschiedene Auftriebskraft des Körpers in der Luft auf Grund der Drücke über die benetzte Körperoberfläche ergeben.

Dafür muss es eine von Null verschiedene Differenz zwischen den Druckverhältnissen ober- und unterhalb des Körpers geben. Somit kann der Druck in der Luftatmosphäre nicht über die Höhe konstant sein.

Hinweis: Insofern die Körperabmaße in z -Richtung zu vernachlässigen sind, kann auch der Auftrieb in der Luft vernachlässigt werden. In Realität ist es mit $\rho_L/\rho_W \approx 1/1000$ eine sehr gute erste Näherung den Auftrieb in der Luft zu vernachlässigen.

- d) Statische globale Impulsbilanz (KGG) in z -Richtung mit der neuen Auftriebskraft in der Luft $F_{A,L}$ und der vorherigen Auftriebskraft im Wasser $F_{A,W}$, Gewichtskraft des Containers $F_{g,C}$ und die Gewichtskraft des Schiffs $F_{g,S}$: $\sum_i F_{z,i} \stackrel{!}{=} 0$



$$\sum_i F_{z,i} = \underbrace{F_{A,W} + F_{A,L}}_{=F_A} - F_{g,C} - F_{g,S} \stackrel{!}{=} 0$$

Kräfte:

Auftriebskraft $F_A = \underbrace{\rho_W g h_{1,L} A_S}_{=F_{A,W}} + \underbrace{\rho_L g (H_S - h_{1,L}) A_S + \rho_L g H_C A_C}_{=F_{A,L}}$

Gewichtskräfte $F_{g,C} + F_{g,S} = (m_S + m_C)g$

Damit folgt aus der statischen globalen Impulsbilanz:

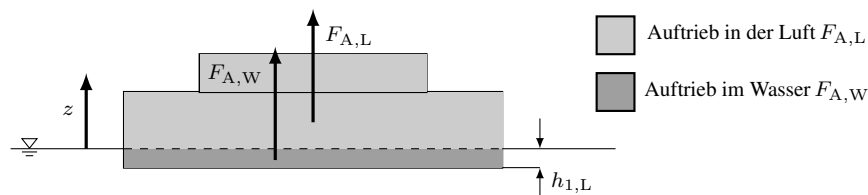
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \rho_W g h_{1,L} A_S + \rho_L g (H_S - h_{1,L}) A_S + \rho_L g H_C A_C - (m_S + m_C)g = 0 \\ &\Rightarrow h_{1,L} = \frac{m_S + m_C}{(\rho_W - \rho_L) A_S} - \frac{\rho_L}{\rho_W - \rho_L} \frac{A_C}{A_S} H_C - \frac{\rho_L}{\rho_W - \rho_L} H_S \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung:

Insofern die Dichte der Luft gegenüber der Dichte des Wassers vernachlässigt werden kann, also $\rho_L \ll \rho_W$ bzw. $\frac{\rho_L}{\rho_W} \rightarrow 0$, wird auch der Auftrieb in der Luft gegenüber dem Auftrieb im Wasser vernachlässigt und es muss sich die Eintauchtiefe aus Teilaufgabe a) ergeben.

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{\rho_L}{\rho_W} \rightarrow 0} h_{1,L} \left(\frac{\rho_L}{\rho_W} \right) &= \lim_{\frac{\rho_L}{\rho_W} \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\rho_L}{\rho_W}} \left(\frac{m_S + m_C}{\rho_W A_S} - \frac{\rho_L}{\rho_W} \frac{A_C}{A_S} H_C - \frac{\rho_L}{\rho_W} H_S \right) \right] \\ &= \frac{m_S + m_C}{\rho_W A_S} = h_1 \checkmark \end{aligned}$$

Nachfolgend ist skizziert, welche Anteile der Körper jeweils Auftrieb im Wasser und in der Luft verursachen:



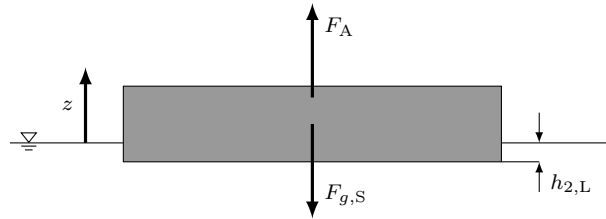
Kriterien an die Skizze

- Auftrieb in der Luft $F_{A,L}$ und Auftrieb im Wasser $F_{A,W}$ klar und richtig zugeordnet

- e) Volumen-/Massenerhaltung bzw. Kontinuitätsgleichung, also konstantes Wasservolumen wie in Teilaufgabe a), aber hier mit $h_{1,L}$ und $h_{2,L}$:

$$\Rightarrow H_{2,L} = H(h_{2,L}) = H_{1,L} - \frac{A_S}{A_B} h_{1,L} + \frac{A_S}{A_B} h_{2,L} + \frac{A_C}{A_B} H_C$$

Statische globale Impulsbilanz/Kräftegleichgewicht am Schiff in z -Richtung: $\sum_i F_{z,i} \stackrel{!}{=} 0$



$$\begin{aligned} \sum_i F_{z,i} &= F_A - F_{g,S} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\rho_W g h_{2,L} A_S}_{=F_{A,W}} + \underbrace{\rho_L g (H_S - h_{2,L}) A_S}_{=F_{A,L}} - m_S g &= 0 \\ \Rightarrow h_{2,L} &= \frac{m_S}{(\rho_W - \rho_L) A_S} - \frac{\rho_L}{\rho_W - \rho_L} H_S \end{aligned}$$

Einsetzen von $h_{1,L}$ aus Teilaufgabe d) und $h_{2,L}$ in $H(h_{2,L})$:

$$\Rightarrow H_{2,L} = H_{1,L} - \frac{m_C}{(\rho_W - \rho_L) A_B} + \frac{\rho_W}{\rho_W - \rho_L} \frac{A_C}{A_B} H_C$$

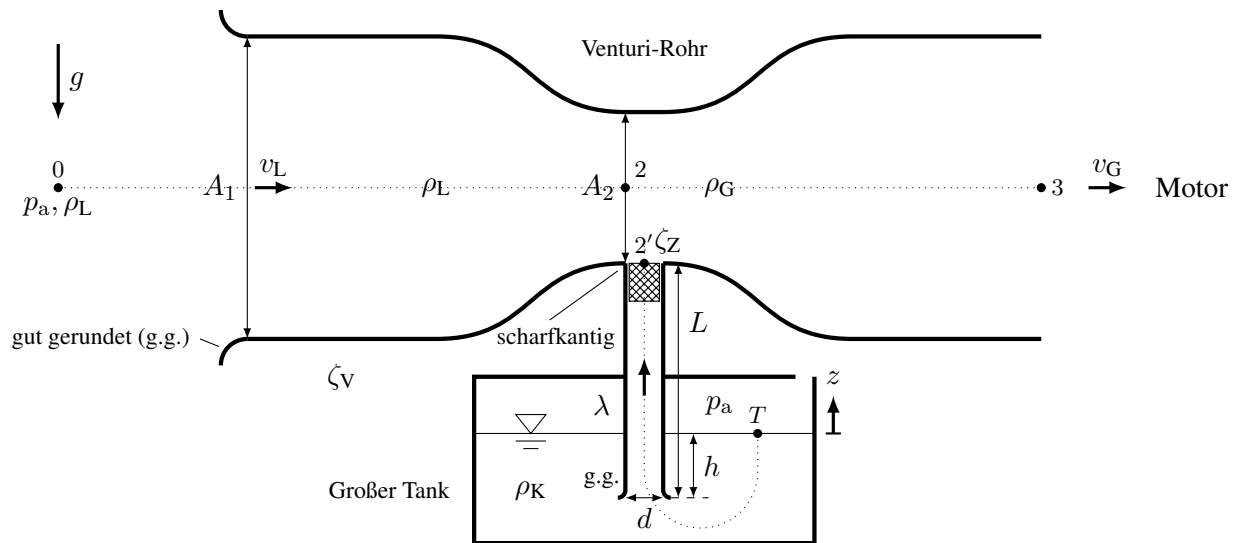
Plausibilitätsprüfung:

Insofern die Dichte der Luft gegenüber der Dichte des Wassers vernachlässigt werden kann, also $\rho_L \ll \rho_W$ bzw. $\frac{\rho_L}{\rho_W} \rightarrow 0$, wird auch der Auftrieb in der Luft gegenüber dem Auftrieb im Wasser vernachlässigt und es muss sich der Wasserstand wie in Teilaufgabe b) ergeben.

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{\rho_L}{\rho_W} \rightarrow 0} H_{2,L} \left(\frac{\rho_L}{\rho_W} \right) &= \lim_{\frac{\rho_L}{\rho_W} \rightarrow 0} \left[H_{1,L} - \frac{m_C}{\rho_W A_B \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_W} \right)} + \frac{1}{1 - \frac{\rho_L}{\rho_W}} \frac{A_C}{A_B} H_C \right] \\ &= H_{1,L} - \frac{m_C}{\rho_W A_B} + \frac{A_C}{A_B} H_C = H_2 \checkmark \end{aligned}$$

2. Aufgabe

a) Skizze der Stromlinien:



Stationäre Bernoulli-Gleichung von der Umgebung 0 hin zur Engstelle 2 im Venturi-Rohr, da gut gerundeter Einlass:

$$p_0 + \rho_L g h_0 + \frac{\rho_L}{2} v_{0,L}^2 = p_2 + \rho_L g h_2 + \frac{\rho_L}{2} v_{2,L}^2$$

Annahmen:

Ruhende Umgebung (Standbetrieb):

$$p_0 = p_a, v_{0,L} = 0$$

Gleiche geodätische Höhe:

$$h_0 = h_2$$

Geschwindigkeit in Engstelle:

$$v_{2,L} > 0$$

Gesuchte Geschwindigkeit:

$$v_{1,\text{L}} = v_{\text{L}} > 0$$

Damit folgt:

$$\Rightarrow p_a = p_2 + \frac{\rho_L}{2} v_{2,L}^2 \quad | \rho_L > 0$$

$$\Rightarrow v_{2,L}^2 = \frac{2}{\rho_L}(p_a - p_2) \quad |v_L > 0$$

$$\Rightarrow v_{2,L} = \sqrt{\frac{2}{\rho_1}(p_a - p_2)}$$

Stationäre Bernoulli-Gleichung von der Kraftstoffoberfläche im Tank T über die Steigrohrleitung und den Zerstäuber hin zum Einlass in das Venturi-Rohr Z:

$$p_T + \rho_K g h_T + \frac{\rho_K}{2} v_T^2 = p_Z + \rho_K g h_Z + \frac{\rho_K}{2} v_Z^2$$

Annahmen:

Tank mit Druckausgleichsöffnung:

$$p_{\text{T}} = p_{\text{a}}$$

Tank als großer Behälter:

$$v_T = 0$$

Geodätische Höhendifferenz:

$$h_Z - h_T = L - h$$

Kraftstoffgeschwindigkeit:

$$v_Z = v_K$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\Rightarrow p_a + \rho_K g h_T &= p_Z + \rho_K g h_Z + \frac{\rho_K}{2} v_K^2 \\ \Rightarrow p_a - p_Z &= \rho_K g (h_Z - h_T) + \frac{\rho_K}{2} v_K^2 \\ \Rightarrow p_a - p_Z &= \rho_K g (L - h) + \frac{\rho_K}{2} v_K^2\end{aligned}$$

Da die statische Druckänderung in der Luft und im Luft-Kraftstoffgemisch über die vertikalen Abmaße im Venturirohr zu vernachlässigen sind, gilt:

$$p_Z = p_2$$

Außerdem kann die Geschwindigkeit des Kraftstoffs mittels der Volumenstromdefinition und der Kreisquerschnittsfläche der Steigrohrleitung $A_K = \frac{\pi d^2}{4} > 0$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\dot{V}_K &= v_K A_K \\ \Rightarrow v_K &= \frac{4 \dot{V}_K}{\pi d^2}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich der folgende Ausdruck für die statische Druckdifferenz:

$$\begin{aligned}\Rightarrow p_a - p_2 &= \rho_K g (L - h) + \frac{\rho_K}{2} \left(\frac{4 \dot{V}_K}{\pi d^2} \right)^2 \\ \Rightarrow p_a - p_2 &= \rho_K g (L - h) + \frac{8 \rho_K \dot{V}_K^2}{\pi^2 d^4}\end{aligned}$$

Eingesetzt in die erste Bernoulli-Gleichung folgt die gesuchte Geschwindigkeit der einströmenden Luft im Venturi-Rohr v_L :

$$\Rightarrow v_{2,L} = \sqrt{2 \frac{\rho_K}{\rho_L} \left(g (L - h) + \frac{8 \dot{V}_K^2}{\pi^2 d^4} \right)}$$

Stationäre Kontinuitätsgleichung, um die gesuchte Geschwindigkeit $v_L = v_{1,L}$ mit $v_{2,L}$ in Beziehung zu setzen:

$$A_1 v_{1,L} = A_2 v_{2,L}$$

Somit ergibt sich final:

$$\begin{aligned}\Rightarrow v_{1,L} &= \frac{A_2}{A_1} v_{2,L} \\ \Rightarrow v_{1,L} &= \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2 \frac{\rho_K}{\rho_L} \left(g (L - h) + \frac{8 \dot{V}_K^2}{\pi^2 d^4} \right)}\end{aligned}$$

b) Die stationäre Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung) im Venturi-Rohr liefert:

$$\dot{m}_G = \dot{m}_L + \dot{m}_K$$

Hinweis: Die vereinfachte Kontinuitätsgleichung mit Querschnittsflächen und Geschwindigkeiten alleine ist auf Grund der unterschiedlichen Dichten nicht anwendbar.

Für die Massenströme gilt $\dot{m}_i = \rho_i \dot{V}_i$, also:

$$\dot{m}_L = \rho_L \dot{V}_L = \rho_L v_L A_1$$

$$\dot{m}_K = \rho_K \dot{V}_K$$

$$\dot{m}_G = \rho_G \dot{V}_G$$

Der Gemischvolumenstrom $\dot{V}_G$ ergibt sich aus der Drehzahl n und dem effektiven Gesamthubvolumen V_H :

$$\dot{V}_G = n V_H$$

Hinweis: Diese Formel gilt für Zwei-Takt-Motoren. Für Vier-Takt-Motoren ist noch der Faktor $1/2$ voran zu stellen.

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho_G n V_H &= \dot{m}_G & | \rho_G V_H > 0 \\ \Rightarrow n &= \frac{\dot{m}_G}{\rho_G V_H} & | \dot{m}_G = \dot{m}_L + \dot{m}_K \text{ einsetzen} \\ \Rightarrow n &= \frac{\dot{m}_L + \dot{m}_K}{\rho_G V_H} & | \text{Massenströme einsetzen} \\ \Rightarrow n &= \frac{\rho_L v_L A_1 + \rho_K \dot{V}_K}{\rho_G V_H} \end{aligned}$$

- c) Stationäre Bernoulli-Gleichung von der Umgebung 0 hin zur Engstelle 2 im Venturi-Rohr, da gut gerundeter Einlass, nun mit Verlusten:

$$p_0 + \rho_L g h_0 + \frac{\rho_L}{2} v_{0,L}^2 = p_2 + \rho_L g h_2 + \frac{\rho_L}{2} v_{2,L}^2 + \Delta p_{0,2}^-$$

Annahmen: Wie in a)

Ruhende Umgebung (Standbetrieb):

$$p_0 = p_a, v_{0,L} = 0$$

Gleiche geodätische Höhe:

$$h_0 = h_2$$

Geschwindigkeit in Engstelle:

$$v_{2,L} > 0$$

Gesuchte Geschwindigkeit:

$$v_{1,L} = v_L > 0$$

Verluste im Venturi-Rohr:

$$\Delta p_{0,2}^- = \zeta_v \frac{\rho_L}{2} v_{1,L}^2 = \zeta_v \frac{\rho_L}{2} v_L^2 > 0$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_a &= p_2 + \frac{\rho_L}{2} v_{2,L}^2 + \zeta_v \frac{\rho_L}{2} v_L^2 & | \rho_L > 0, v_{2,L} = \frac{A_1}{A_2} v_L \\ \Rightarrow \frac{\rho_L}{2} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \zeta_v \right] v_L^2 &= p_a - p_2 & | v_L > 0 \\ \Rightarrow v_L &= \sqrt{\frac{2}{\rho_L} \frac{p_a - p_2}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \zeta_v}} \end{aligned}$$

Stationäre Bernoulli-Gleichung von der Kraftstoffoberfläche im Tank T über die Steigrohrleitung und den Zerstäuber hin zum Einlass in das Venturi-Rohr Z, nun mit Verlusten:

$$p_T + \rho_K g h_T + \frac{\rho_K}{2} v_T^2 = p_Z + \rho_K g h_Z + \frac{\rho_K}{2} v_Z^2 + \Delta p_{T,Z}^-$$

Annahmen: Wie in a)

Tank mit Druckausgleichsöffnung:	$p_T = p_a$
Tank als großer Behälter:	$v_T = 0$
Geodätische Höhendifferenz:	$h_Z - h_T = L - h$
Kraftstoffgeschwindigkeit:	$v_Z = v_K$

Verluste im Steigrohr:

Gesamt:	$\Delta p_{T,Z}^- = \Delta p_{T,Z}^{-,\lambda} + \Delta p_{T,Z}^{-,Z} > 0$
Rohrreibung:	$\Delta p_{T,Z}^{-,\lambda} = \lambda \frac{\rho_K}{2} \frac{L}{d} v_Z^2$
Zerstäuber:	$\Delta p_{T,Z}^{-,Z} = \zeta_Z \frac{\rho_K}{2} v_Z^2$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_a + \rho_K g h_T &= p_Z + \rho_K g h_Z + \frac{\rho_K}{2} v_K^2 + \lambda \frac{\rho_K}{2} \frac{L}{d} v_Z^2 + \zeta_Z \frac{\rho_K}{2} v_Z^2 \\ \Rightarrow p_a - p_Z &= \rho_K g (L - h) + \frac{\rho_K}{2} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_Z \right) v_K^2 \end{aligned}$$

Wie in Teilaufgabe a) gilt:

$$\begin{aligned} p_Z &= p_2 \\ v_K &= \frac{4 \dot{V}_K}{\pi d^2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich der folgende Ausdruck für die statische Druckdifferenz:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_a - p_2 &= \rho_K g (L - h) + \frac{\rho_K}{2} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_Z \right) \left(\frac{4 \dot{V}_K}{\pi d^2} \right)^2 \\ \Rightarrow p_a - p_2 &= \rho_K g (L - h) + \frac{8 \rho_K \dot{V}_K^2}{\pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_Z \right) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die erste Bernoulli-Gleichung folgt die gesuchte Geschwindigkeit der Einstömenden Luft im Venturi-Rohr v_L :

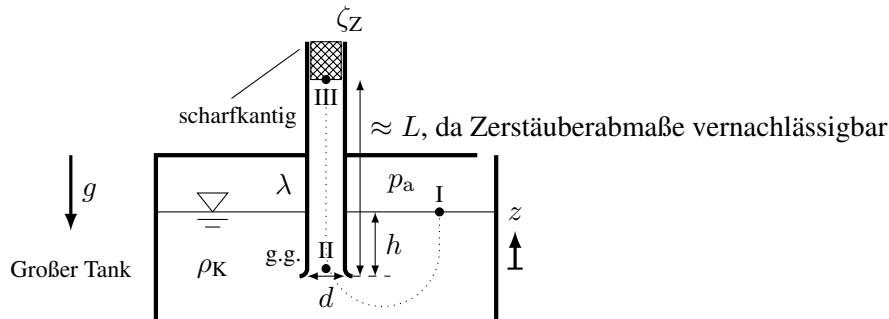
$$\Rightarrow v_L = \sqrt{\frac{2 \frac{\rho_K}{\rho_L} g (L - h) + \frac{8 \dot{V}_K^2}{\pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_Z \right)}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \zeta_V}}$$

Plausibilitätsprüfung:

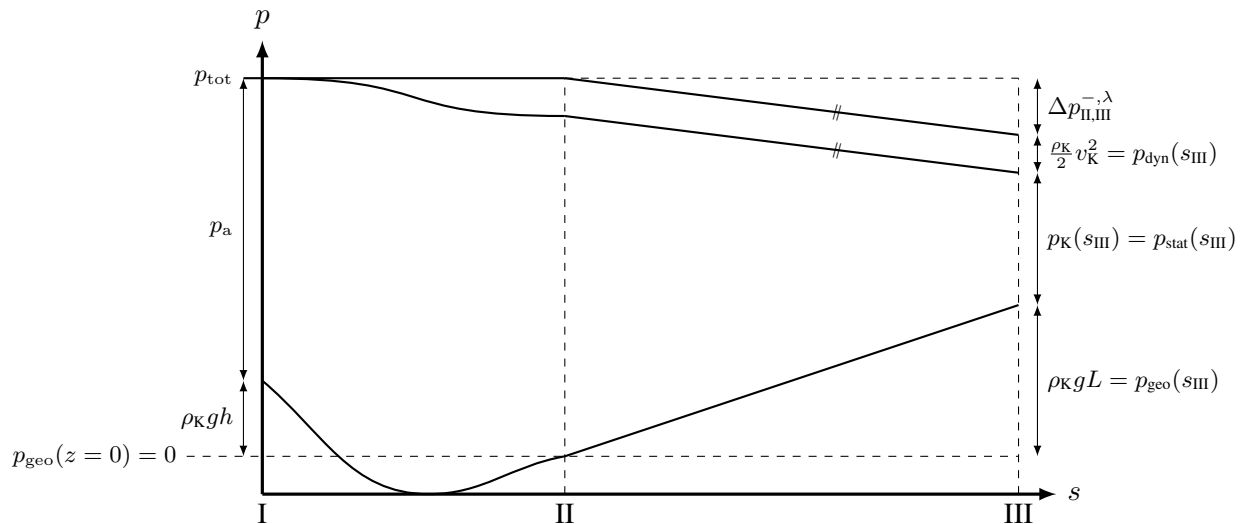
- Je höher der Verlust im Venturi-Rohr $\zeta_V \uparrow$, desto kleiner $v_L \downarrow$

- Je höher der Verlust in der Steigrohrleitung $\zeta_V, \lambda \uparrow$, desto größer muss $v_L \uparrow$ sein, damit der gleiche Kraftstoff-Volumenstrom $\dot{V}_K$ angesogen wird.
- Das Ergebnis aus Teilaufgabe a) ergibt sich für den Spezialfall, dass alle Verluste vernachlässigbar sind, also $\zeta_V, \zeta_Z, \lambda \rightarrow 0$.

d) Stromlinie entlang derer die Druckanteile skizziert werden sollen:



Verläufe der Druckanteile von der Oberfläche (I) des Kraftstoffs im Tank bis direkt vor dem Zerstäuber (III):



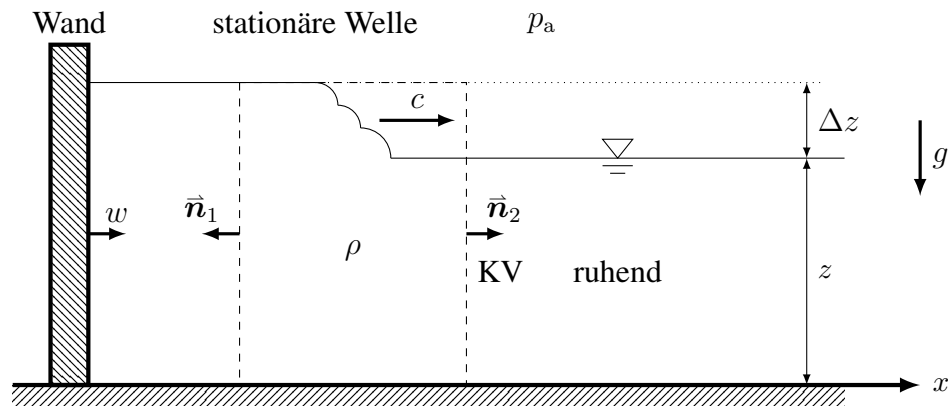
Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsenbeschriftung, Bezugspunkte und Druckanteile eindeutig gekennzeichnet
- Umgebungsdruck $p_a = p_K(s_I)$ an der Oberfläche bei I
- Geodätischer Anteil $p_{geo}(s)$ nimmt von I nach II ab und steigt danach linear im Steigrohr bis III
- Der dynamische Anteil $p_{dyn}(s)$ steigt langsam von Null bei I bis II und ist danach konstant bis III
- Der Totaldruck p_{tot} ist von I nach II konstant und nimmt durch die Verluste $\Delta p^{-,\lambda}(s)$ linear von II bis III ab
- Unterdruck bei III $p_K(s_{III}) < p_a$, damit der Kraftstoff aus dem Tank angesaugt wird

Hinweis: Der genaue Verlauf der einlaufenden Stromlinie ist nicht bekannt, so dass eine plausibel glatte Kurve zwischen Punkt I und II qualitativ ausreicht.

3. Aufgabe

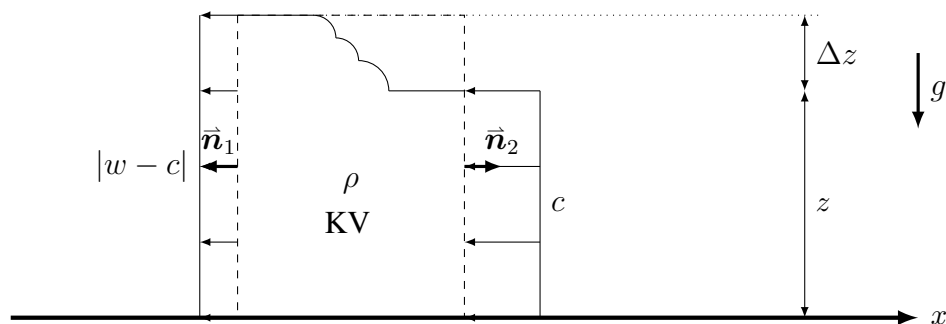
a) Im mit der Wellengeschwindigkeit c mitbewegten Kontrollvolumen V ist die Strömung stationär.



Kriterien an die Skizze:

- Mit der Wellengeschwindigkeit c mitbewegtes Kontrollvolumen um die Welle skizziert mit klarer Bezeichnung der Flächen, die in den Bilanzen verwendet werden.

Skizze zur Kinematik im mit c mitbewegten Kontrollvolumen:



Kinematik am Einlass bei 1:

$\vec{v}_1 = w\vec{e}_x$	absolut bewegt	$\vec{n}_1 = -\vec{e}_x$	Normalenvektor
$\vec{v}_{A_1} = c\vec{e}_x$	Relativbewegung	$A_1 = (z + \Delta z)B$	Fläche
$\vec{v}_{1,rel} = (w - c)\vec{e}_x$	relativ bewegt		

Kinematik am Auslass bei 2:

$\vec{v}_2 = 0\vec{e}_x$	absolut ruhend	$\vec{n}_2 = \vec{e}_x$	Normalenvektor
$\vec{v}_{A_2} = c\vec{e}_x$	Relativbewegung	$A_2 = zB$	Fläche
$\vec{v}_{2,rel} = (0 - c)\vec{e}_x = -c\vec{e}_x$	relativ bewegt		

Kinematik der Geschwindigkeiten am Einlass und Auslass sind richtig erkannt und konsistent mit dem gewählten Kontrollvolumen.

Stationäre globale Massenbilanz im mitbewegten System:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV}_{=0} + \oint_{\partial V} \rho \underbrace{(\vec{v} - \vec{v}_{\partial V})}_{=\vec{v}_{\text{rel}}} \cdot d\vec{A} &= 0 \quad \left| \text{stationär, inkompressible Blockprofilströmung} \right. \\
 \Rightarrow \sum_i \rho_i \underbrace{(\vec{v}_i - \vec{v}_{A_i})}_{=\vec{v}_{i,\text{rel}}} \cdot \vec{n}_i A_i &= 0 \quad \left| \rho = \rho_i > 0, \text{Einlass bei 1, Auslass bei 2} \right. \\
 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 A_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 A_2 &= 0 \quad \left| \text{siehe Kinematik mit } \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \right. \\
 \Rightarrow (w - c) \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x) A_1 + (-c) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x A_2 &= 0 \\
 \Rightarrow -(w - c) A_1 - c A_2 &= 0 \quad \left| \text{Flächen einsetzen} \right. \\
 \Rightarrow -(w - c)(z + \Delta z) B - c z B &= 0 \quad \left| B > 0 \right. \\
 \Rightarrow -(w - c)(z + \Delta z) - c z &= 0
 \end{aligned}$$

Aus der Massenbilanz folgt:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow -w(z + \Delta z) + c z + c \Delta z - c z &= 0 \quad \left| c > 0 \right. \\
 \Rightarrow \frac{w}{c} &= \frac{\Delta z}{z + \Delta z}
 \end{aligned}$$

Mittels der Annahme einer kleinen Amplitude, also $\Delta z \ll z$, gilt:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{w}{c} &= \frac{\Delta z}{z + \Delta z} \quad \left| \Delta z \ll z \right. \\
 \Rightarrow \frac{w}{c} &\approx \frac{\Delta z}{z}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die Wand sich deutlich langsamer als die Wellengeschwindigkeit bewegen muss, um derart kleine Welle zu erzeugen:

$$w \ll c$$

Zusatz: Insofern die Amplitude Δz nicht mehr gegenüber der Fluidtiefe z vernachlässigt werden kann, gilt:

$$\Rightarrow \frac{w}{c} = \frac{\Delta z}{z + \Delta z} < 1$$

Aber auch hier gilt mit $z, \Delta z > 0$:

$$w < c \quad \Rightarrow w - c < 0$$

b) Die globale Impulsbilanz in x -Richtung für das mitbewegte Kontrollvolumen $V(t)$ lautet allgemein:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_x dV}_{=0 \text{ stationär}} + \oint_{\partial V(t)} \rho (\vec{v} \cdot \vec{e}_x) \underbrace{(\vec{v} - \vec{v}_{\partial V})}_{=\vec{v}_{\text{rel}}} \cdot d\vec{A} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{e}_x \quad \left| \text{inkompressible Blockprofile} \right. \\
 \Rightarrow \sum_i \rho_i (\vec{v}_i \cdot \vec{e}_x) \underbrace{(\vec{v}_i - \vec{v}_{A_i})}_{=\vec{v}_{i,\text{rel}}} \cdot \vec{n}_i A_i &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

Die linke Seite der Impulsbilanz mit den verbleibenden konvektiven Termen berechnet sich für den Einlass bei 1 und Auslass bei 2 mit $\rho = \rho_1 = \rho_2$ und der vorliegenden Kinematik mit $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$ zu:

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \rho_i (\vec{v}_i \cdot \vec{e}_x) (\vec{v}_{i,\text{rel}} \cdot \vec{n}_i) A_i \\
 &= \rho (\vec{v}_1 \cdot \vec{e}_x) (\vec{v}_{1,\text{rel}} \cdot \vec{n}_1) A_1 + \rho (\vec{v}_2 \cdot \vec{e}_x) (\vec{v}_{2,\text{rel}} \cdot \vec{n}_2) A_2 \\
 &= \rho (w \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) ((w - c) \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x)) A_1 + \rho (0 \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) (-c \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) A_2 \\
 &= \rho (w) [-(w - c)] (z + \Delta z) B + \rho (0) (-c) z B \quad \rightarrow 0 \\
 &= \rho w (c - w) (z + \Delta z) B
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Impulsbilanz stellt die Summe aller angreifenden Kräfte dar, also Volumen-, Oberflächen- und Linienkräfte dar. Die Gravitationskraft $\vec{F}_g$ ist die einzige Volumen- und die Druckkräfte $\vec{F}_p$ und Reaktionskraft der Wand auf das Fluid $\vec{F}_{W \rightarrow F}$ sind die einzigen Oberflächenkräfte in x -Richtung, da die Strömung verlustfrei ist.

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{e}_x \\
 &= \vec{F}_g \cdot \vec{e}_x + \vec{F}_p \cdot \vec{e}_x + \vec{F}_{W \rightarrow F} \cdot \vec{e}_x
 \end{aligned}$$

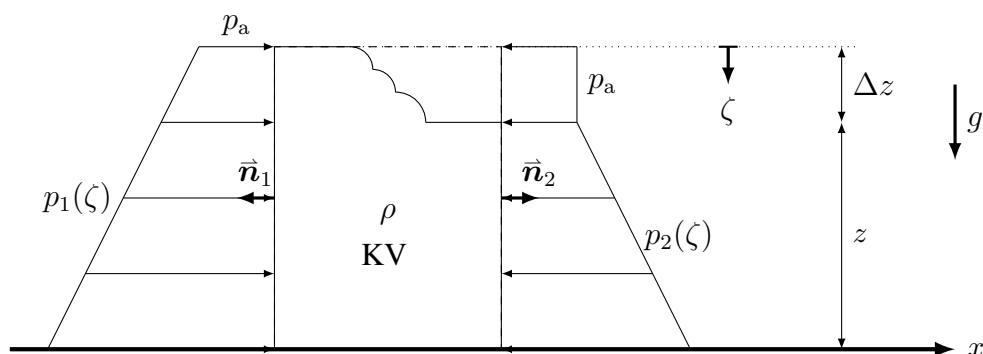
Die Gravitationskraft $\vec{F}_g$ mit dem Fluidvolumen V im Kontrollvolumen und Reaktionskraft der Wand auf das Fluid $\vec{F}_{W \rightarrow F}$ zeigen nur senkrecht zur x -Richtung und sind somit nicht Teil der Impulsbilanz in x -Richtung.

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_g \cdot \vec{e}_x &= -\rho V g \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0} = 0 \\
 \vec{F}_{W \rightarrow F} \cdot \vec{e}_x &= F_{W \rightarrow F} \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$

Die Druckkraft in x -Richtung errechnet sich allgemein wie folgt, wobei nur die Flächen am Einlass bei 1 und beim Auslass bei 2 von Null verschiedene Beiträge in x -Richtung aufweisen:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_p \cdot \vec{e}_x &= \int_{A_1} p_1 \, dA - \int_{A_2} p_2 \, dA && | \text{Integrale ausschreiben} \\
 &= \int_0^{z+\Delta z} p_1(\zeta) B \, d\zeta - \int_0^{z+\Delta z} p_2(\zeta) B \, d\zeta && | B = \text{const} \\
 &= B \int_0^{z+\Delta z} [p_1(\zeta) - p_2(\zeta)] \, d\zeta
 \end{aligned}$$

Skizze zum Druckverlauf am Einlass bei 1 und beim Auslass bei 2:



Der statische Druck ergibt sich aus der hydrostatischen Grundgleichung (HGG) in integrierter Form oder aus der Bernoulli-Gleichung senkrecht zur Strömungsrichtung für den Einlass bei 1 und den Auslass bei 2:

$$p_1(\zeta) = p_a + \rho g \zeta \quad 0 \leq \zeta \leq z + \Delta z$$

$$p_2(\zeta) = \begin{cases} p_a & 0 \leq \zeta \leq \Delta z \\ p_a + \rho g(\zeta - \Delta z) & \Delta z \leq \zeta \leq z + \Delta z \end{cases}$$

Damit ergibt sich für die Druckkraft aufgeteilt in die Bereiche $0 \leq \zeta \leq \Delta z$ und $\Delta z \leq \zeta \leq z + \Delta z$:

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= B \int_0^{\Delta z} [p_1(\zeta) - p_2(\zeta)] d\zeta + B \int_{\Delta z}^{z+\Delta z} [p_1(\zeta) - p_2(\zeta)] d\zeta \\ &= B \int_0^{\Delta z} \rho g \zeta d\zeta + B \int_{\Delta z}^{z+\Delta z} [\rho g \zeta - \rho g(\zeta - \Delta z)] d\zeta \\ &= B \int_0^{\Delta z} \rho g \zeta d\zeta + B \int_{\Delta z}^{z+\Delta z} \rho g \Delta z d\zeta \\ &= B \left[\frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \right]_0^{\Delta z} + B [\rho g \Delta z \zeta]_{\Delta z}^{z+\Delta z} \\ &= B \frac{1}{2} \rho g \Delta z^2 + B \rho g \Delta z (z + \Delta z - \Delta z) \\ &= B \frac{1}{2} \rho g \Delta z^2 + B \rho g \Delta z z \end{aligned}$$

Alternativ kann die Druckkraft auch geometrisch über die Fläche des linearen Druckprofils innerhalb einer entsprechenden Skizze zu den Druckprofilen am Einlass bei 1 und Auslass bei 2 bestimmt werden.

Insgesamt ergibt sich somit für die Impulsbilanz in x -Richtung unter Berücksichtigung der Massenbilanz folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i (\vec{v}_i \cdot \vec{e}_x) \underbrace{(\vec{v}_i - \vec{v}_{A_i})}_{=\vec{v}_{i,rel}} \cdot \vec{n}_i A_i &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{e}_x \\ \Rightarrow \rho w (c - w) (z + \Delta z) B &= \frac{1}{2} \rho g \Delta z^2 + B \rho g \Delta z z \quad \left| \text{Massenbilanz } w = c \frac{\Delta z}{z} \right. \\ \Rightarrow \rho c \frac{\Delta z}{z} \left(c - c \frac{\Delta z}{z} \right) (z + \Delta z) B &= \frac{1}{2} \rho g \Delta z^2 + B \rho g \Delta z z \quad \left| \Delta z > 0 \text{ herauskürzen} \right. \\ \Rightarrow \rho c \frac{1}{z} c \left(1 - \frac{\Delta z}{z} \right) (z + \Delta z) B &= \frac{1}{2} \rho g \Delta z + B \rho g z \end{aligned}$$

Einarbeiten der Klein-Amplituden-Näherung $\Delta z \ll z$ bzw. $\Delta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho c \frac{1}{z} c \left(1 - \frac{\Delta z}{z} \right) (z + \Delta z) B &= \frac{1}{2} \rho g \Delta z + B \rho g z \quad \left| \text{Grenzwert } \Delta z \rightarrow 0 \text{ bzw. } \Delta z \ll z \right. \\ \Rightarrow \rho c \frac{1}{z} c (1 - 0) (z + 0) B &\approx 0 + B \rho g z \quad \left| \text{Zusammenfassen mit } z > 0 \right. \\ \Rightarrow \rho c^2 B &\approx B \rho g z \quad \left| \text{Zusammenfassen mit } \rho, B > 0 \right. \\ \Rightarrow c^2 &\approx g z \end{aligned}$$

Letztendlich folgt mit $c > 0$ dann der gesuchte Ausdruck für die Geschwindigkeit der Oberflächenwelle:

$$\Rightarrow c = \sqrt{gz}$$

- c) Insofern sich die Oberflächenwelle einer flachen Strandküste nähert nimmt die Fluidtiefe z allmählich ab und somit sinkt die Wellengeschwindigkeit nach dem hergeleiteten Ausdruck ebenfalls.

$$\text{Welle nähert sich dem flachen Strand} \Rightarrow z \downarrow \Rightarrow c = \sqrt{gz} \downarrow$$

Die Welle bremst somit ab und die kinetische Energie wird in potentielle Energie umgewandelt (Energiebilanz ohne Verluste), indem sich die Welle auftürmt, also die Amplitude Δz ansteigt. Infolgedessen kann zudem die Welle nicht mehr als stationär im mitbewegten System betrachtet werden.

$$c \downarrow \xRightarrow{\text{Energie-Bilanz}} \text{kinetische Energie} \downarrow, \text{potentielle Energie} \uparrow \Rightarrow \Delta z \uparrow$$

Das hergeleitete Modell für die Wellengeschwindigkeit c versagt in dem Moment, in dem die Annahme zur Herleitung, dass die Amplitude Δz der Welle im Verhältnis zur Fluidtiefe z klein ist, nicht mehr hält.

$$\Delta z \not\ll z \Rightarrow c \neq \sqrt{gz}$$

Hinweis: Siehe flache (kleine Amplitude) Schwerewellen bzw. Flachwasserwellen hier.

4. Aufgabe

- a) Die Froude-Zahl ist wie folgt quantitativ definiert:

$$\text{Fr} = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{gz}}$$
$$\text{Fr}^2 = \frac{v^2}{gz} \sim \frac{\frac{1}{2}\rho v^2}{\rho gz}$$

Die Froude-Zahl kann als Verhältnis folgender Größen qualitativ interpretiert werden:

$$\text{Fr} = \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{(\text{Oberflächen-})\text{Wellengeschwindigkeit}}$$
$$\text{Fr}^2 = \frac{\text{kinetische Energie}}{\text{geodätische Energie}}$$

- b) Die notwendige Bedingung, damit ein Wassersprung in einer offenen Gerinneströmung entstehen kann, ist, dass stromaufwärts die Froude-Zahl größer als 1 ist. Hier:

$$\text{Fr}_0 > 1$$

- c) Bernoulli-Gleichung entlang der Fluidoberfläche in Energiehöhenform von 0 bis 1: Ohne Wechselsprung, keine Verluste

$$\begin{aligned} H_0 + y_0 &= H_1 + y_1 + \Delta h^- & | \text{horizontal } y_0 &= y_1 \\ \Rightarrow H_0 &= H_1 + \Delta h^- & | \text{kein Wechselsprung } \Delta h^- &= 0 \\ \Rightarrow H_0 &= H_1 & | \text{Energiehöhe } H_i &= z_i + \frac{1}{2g}v_i^2 \\ \Rightarrow z_0 + \frac{1}{2g}v_0^2 &= z_1 + \frac{1}{2g}v_1^2 \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung (Globale Massenbilanz) von 0 bis 1 für ein Rechteck-Gerinne mit Blockprofilströmung:

$$\begin{aligned} v_0 z_0 B_0 &= v_1 z_1 B_1 & | \text{mit } B_1, z_1 &> 0 \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{z_0 B_0}{z_1 B_1} v_0 & | \text{mit } \zeta = \frac{z_1}{z_0}, \beta = \frac{B_1}{B_0} \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{v_0}{\zeta \beta} \end{aligned}$$

Definition der Froude-Zahl verwenden, um den kinetischen Anteil an der Energiehöhe umzuschreiben:

$$\frac{1}{2g}v_i^2 = \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{gz_i} z_i = \frac{1}{2} \text{Fr}_i^2 z_i$$

Damit ergibt sich für die Bernoulli-Gleichung:

$$\Rightarrow z_0 + \frac{1}{2} \text{Fr}_0^2 z_0 = z_1 + \frac{1}{2} \text{Fr}_1^2 z_1$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, des Verjüngungsverhältnisses der Kanalbreiten $\beta = B_1/B_0$ und des Verhältnisses der Spiegelhöhen $\zeta = z_1/z_0$ wird der unbekannte Term mit der Froude-Zahl in der Engstelle Fr_1 mittels der ebenfalls unbekannten Froude-Zahl Fr_0 stromauf ausgedrückt.

$$Fr_1^2 = \frac{v_1^2}{gz_1} = \frac{\frac{v_0^2}{\zeta^2 \beta^2}}{g \underbrace{\zeta z_0}_{=z_1}} = \frac{v_0^2}{\underbrace{gz_0}_{=Fr_0^2}} \frac{1}{\zeta^3 \beta^2} = Fr_0^2 \frac{1}{\zeta^3 \beta^2}$$

$$\Rightarrow Fr_1^2 z_1 = Fr_0^2 \frac{1}{\zeta^3 \beta^2} \zeta z_0 = Fr_0^2 \frac{z_0}{\zeta^2 \beta^2}$$

Somit ergibt sich folgende Bernoulli-Gleichung, mit der die Froude-Zahl Fr_0 bestimmt wird:

$$\begin{aligned} \Rightarrow z_0 + \frac{1}{2} Fr_0^2 z_0 &= \zeta z_0 + \frac{1}{2} Fr_0^2 \frac{z_0}{\zeta^2 \beta^2} && | \text{mit } z_0 > 0 \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} Fr_0^2 &= \zeta + \frac{1}{2} Fr_0^2 \frac{1}{\zeta^2 \beta^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2 \beta^2} \right) Fr_0^2 &= \zeta - 1 && | \text{mit } \zeta \beta \neq 1 \\ \Rightarrow Fr_0^2 &= 2 \frac{\zeta - 1}{1 - \frac{1}{\zeta^2 \beta^2}} && | \text{mit } Fr_0 > 0 \\ \Rightarrow Fr_0 &= \sqrt{2 \frac{\zeta - 1}{1 - \frac{1}{\zeta^2 \beta^2}}} \end{aligned}$$

Und hieraus folgt:

$$\begin{aligned} Fr_1^2 &= Fr_0^2 \frac{1}{\zeta^3 \beta^2} = 2 \frac{\zeta - 1}{1 - \frac{1}{\zeta^2 \beta^2}} \frac{1}{\zeta^3 \beta^2} = 2 \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta - 1}{\zeta^2 \beta^2 - 1} && | \text{mit } Fr_1 > 0 \\ \Rightarrow Fr_1 &= \sqrt{2 \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta - 1}{\zeta^2 \beta^2 - 1}} \end{aligned}$$

- d) **Kurzgefasst:** Der Übergang in den überkritischen Fließzustand geschieht kontinuierlich. Ohne eine Änderung der Sohlenhöhe (horizontales Gerinne) und ohne einen Wechselsprung muss die Energiehöhe konstant bleiben, so dass eine Zustandsänderung nur durch eine Änderung von $\dot{V}/B$ herbeigeführt werden kann. Bei unveränderten Volumenstrom $\dot{V}$ muss die Kanalbreite ausreichend verringert werden. Das Verjüngungsverhältnis der Kanalbreiten $\beta = B_1/B_0$ muss folglich einen hinreichend kleinen Wert annehmen, sodass der Grenzzustand erreicht und durchlaufen werden kann.

Erklärung zum Energiehöhendigramm: Im nachfolgenden Energiehöhendigramm liegt der Zustand stromab bei 0 auf der Energiehöhenkurve $H(z_0)$ mit dem breitenspezifischen Volumenstrom $\dot{V}/B_0$. Da der Volumenstrom konstant ist, also $\dot{V} = \dot{V}_0 = \dot{V}_2$, gilt für das Verhältnis der breitenspezifischen Volumenströme:

$$\frac{\frac{\dot{V}}{B_1}}{\frac{\dot{V}}{B_0}} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{1}{\beta}$$

Somit folgt für den breitenspezifischen Volumenstrom in der Engstelle:

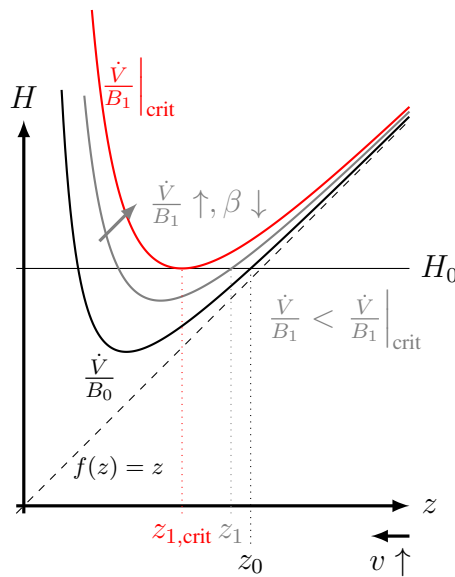
$$\beta \downarrow \quad B_0 \stackrel{=}{\Rightarrow} \text{const} \quad \frac{\dot{V}}{B_1} \uparrow$$

Mittels der nachfolgenden Definition der Energiehöhe ergibt sich für ein sinkendes β ein steigender Wert für den breitenspezifischen Volumenstrom $\dot{V}/B_1$ und somit für die Energiehöhe $H(z_1)$.

$$H(z_1) = z_1 + \frac{\left(\frac{\dot{V}}{B_1}\right)^2}{2gz_1^2} \quad \text{mit } \beta \downarrow \quad \text{bzw.} \quad \frac{\dot{V}}{B_1} \uparrow \Rightarrow H(z_1) \uparrow \Rightarrow H(z_{1,\text{crit}}) \uparrow$$

Sobald das Verjüngungsverhältnis der Kanalbreiten β soweit gesunken ist, dass das Minimum der Energiehöhen-Kurve genau der initialen Energiehöhe H_0 entspricht, stellt sich im Querschnitt 1 der kritische Fließzustand ein.

Laut Aufgabenstellung ist die Strömung vor der Verengung unterkritisch, also $Fr_0 < 1$. Die Zustandsänderung lässt sich daher mithilfe der Kurvenschar für verschiedene breitenspezifische Volumenströme im Energiehöhendidiagramm beschreiben und erklären.



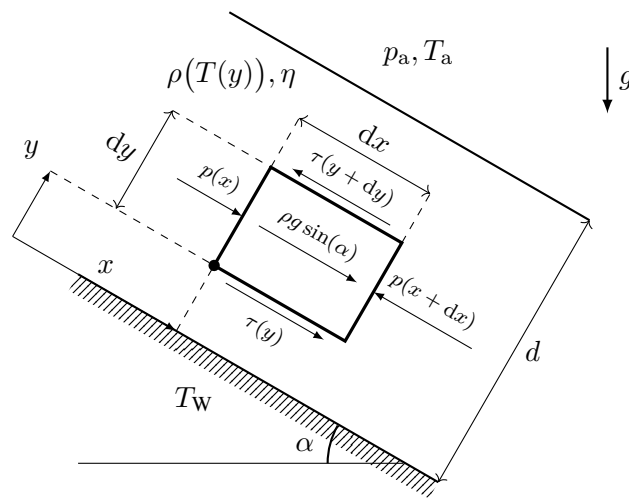
Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsenbeschriftung, Hauptwinkelhalbierende $f(z) = z$
- Der Verlauf der Energiehöhenkurve für $\frac{\dot{V}}{B_0}$ und $\frac{\dot{V}}{B_1}$ ist qualitativ richtig
- Zustand (z_0, H_0) ist unterkritisch eingezeichnet und das Minimum des Verlaufs der Energiehöhenkurve für $\frac{\dot{V}}{B_0}$ ist unterhalb von H_0 .
- Schar der Energiehöhenkurven mit steigendem breitenspezifischen Volumenstrom $\frac{\dot{V}}{B_i} \uparrow$ ist ansteigend eingezeichnet
- Das Minimum für den kritischen breitenspezifischen Volumenstrom bei $1 \frac{\dot{V}}{B_1} \Big|_{\text{crit}}$ berührt genau gerade die initiale Energiehöhe H_0

Hinweis: Die Zustandsänderung findet nicht entlang einer Energiehöhenkurven statt, sondern durch den Wechsel zu einer anderen Energiehöhenkurve mit dem entsprechenden breitenspezifischen Volumenstrom $\dot{V}/B_i$ als Kurvenscharparameter.

5. Aufgabe

- a) Skizze des differentiellen Volumenelements zur Herleitung der Differentialgleichung mit Annahme der Schubspannungen nach negativer Konvention:



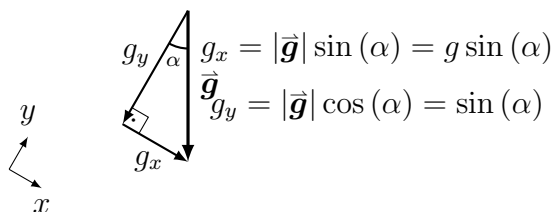
Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsen mit Beschriftung
- Kartesisches differentielles Element mit Abmaßen dx und dy in richtiger Orientierung
- Relevante Kräfte: Schubspannungen und Gravitation

Stationärer Impulssatz bzw. Impulsbilanz am kartesischen differentiellen Element in x -Richtung: Die konvektiven Terme auf der linken Seite fallen auf Grund der ausgebildeten laminaren Strömung zu Null weg. Weiterhin sind somit die Schubspannung $\tau(y)$ und die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung $u(y)$ alleinige Funktionen in der wandnormalen Koordinate y .

$$0 = \rho g \sin(\alpha) dx dy dz + p(x) dy dz - p(x + dx) dy dz + \tau(y) dx dz - \tau(y + dy) dx dz$$

Die x -Komponente der Erdbeschleunigung ergibt sich dabei aus der Vektorzerlegung der Gravitationsbeschleunigung.



Auf Grund der freien Oberfläche und der konstanten Dicken beider Fluidschichten in Hauptströmungsrichtung ist der Druckgradient in x -Richtung Null, plausibel mittels Bernoulli-Gleichung und differentieller Impulsbilanz in y -Richtung, sodass sich die Druckterme in der Impulsbilanz in x -Richtung am differentiellen Element gegenseitig aufheben:

$$p(x) dy dz - p(x + dx) dy dz = 0$$

Mit der Taylor-Reihenentwicklung am Entwicklungspunkt mit den Koordinaten (x, y, z) , welcher als Punkt in der obigen Skizze gekennzeichnet ist, gilt:

$$\tau(y + dy) = \tau(y) + d\tau = \tau(y) + \frac{d\tau}{dy} dy$$

Somit ergibt sich für die Impulsbilanz am differentiellen Element:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz + \tau(y) dx dz - \left[\tau(y) + \frac{d\tau}{dy} dy \right] dx dz \\ \Rightarrow 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz - \frac{d\tau}{dy} dx dy dz \\ \Rightarrow 0 &= \left[\rho g \sin(\alpha) - \frac{d\tau}{dy} \right] dx dy dz \quad \text{wobei } dx dy dz \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} &= \rho(T(y)) g \sin(\alpha) \neq \text{const}_y \end{aligned}$$

- b) Zu beachten ist, dass auf Grund der temperaturabhängigen Dichte $\rho(T)$ und des gegebenen Temperatur-Profils $T(y)$ die rechte Seite der zuvor hergeleiteten DGL nicht konstant ist. Durch Einsetzen des gegebenen Temperatur-Profils in das thermische Stoffmodell ergibt das Dichte-Profil $\rho(y)$:

$$\begin{aligned} \rho(T(y)) &= \rho_w [1 - \beta(T(y) - T_w)] \\ \Rightarrow \rho(y) &= \rho_w \left[1 - \beta \left(-\frac{T_w - T_a}{d} y + T_w - T_w \right) \right] \\ \Rightarrow \rho(y) &= \rho_w \left[1 + \beta(T_w - T_a) \frac{y}{d} \right] \neq \text{const}_y \quad \text{linear mit } \rho(y) \uparrow \text{ für } y \uparrow \end{aligned}$$

Eingesetzt in die zuvor bestimmte DGL für die Schubspannungsverteilung liefert:

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho_w \left[1 + \beta(T_w - T_a) \frac{y}{d} \right] g \sin(\alpha) \neq \text{const}_y$$

Unbestimmte Integration nach y mit $\rho_w, \beta, T_w, T_a = \text{const}$:

$$\tau(y) = \rho_w \left[y + \beta(T_w - T_a) \frac{y^2}{2d} \right] g \sin(\alpha) + C_1$$

Randbedingung der freien Oberfläche ohne Oberflächenspannungseffekte:

$$\begin{aligned} \tau(y = d) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \tau(y = d) &= \rho_w \left[d + \beta(T_w - T_a) \frac{d^2}{2d} \right] g \sin(\alpha) + C_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_1 &= -\rho_w \left[d + \beta(T_w - T_a) \frac{d}{2} \right] g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

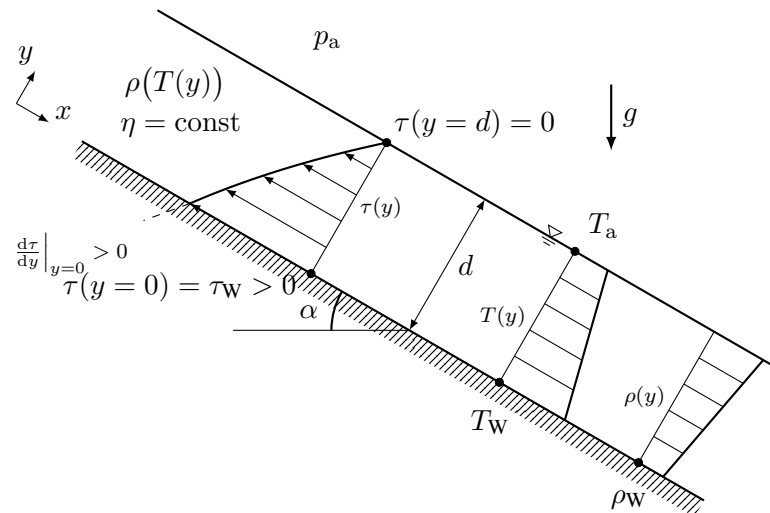
Somit ergibt sich das Schubspannungsprofil zu:

$$\tau(y) = \rho_w g \sin(\alpha) \left[y - d + \beta \frac{T_w - T_a}{2} \left(\frac{y^2}{d} - d \right) \right]$$

Die Wandschubspannung τ_W errechnet sich als:

$$\begin{aligned}\tau_W &= \tau(y = y_W = 0) \\ \Rightarrow \tau_W &= \rho_W g \sin(\alpha) \left[0 - d + \beta \frac{T_W - T_a}{2} \left(\frac{0^2}{d} - d \right) \right] \\ \Rightarrow \tau_W &= \rho_W g \sin(\alpha) \left[-d + \beta \frac{T_W - T_a}{2} (-d) \right] \\ \Rightarrow \tau_W &= -\rho_W g \sin(\alpha) d \left[1 + \beta \frac{T_W - T_a}{2} \right] < 0 \quad \text{mit } T_W > T_a, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Skizze des Schubspannungsprofils:



Kriterien an die Skizze:

- Notwendig: Achsenbeschriftung, eindeutige Kennzeichnung der Wand und freien Oberfläche
- Der Verlauf von $\tau(y)$ ist eine Parabel 2ter Ordnung mit richtiger Orientierung
- Randbedingung an der freien Oberfläche $\tau(y = d) = 0$

Hinweis: Die Skizzen des Temperaturprofils $T(y)$ und des Dichteprofiles $\rho(y)$ sind nicht gefordert, aber für die Verständlichkeit und Vollständigkeit mit skizziert.

- c) Mittels des mechanischen Stoffmodells ergibt sich aus der differentiellen Impulsbilanz die DGL zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils. Nach negativer Konvention für die laminare ausgebildete Strömung lautet das mechanische Stoffmodell eines Newton'schen Fluids:

$$\tau = -\eta \frac{du}{dy}$$

Eingesetzt in die zuvor hergeleitete Schubspannungsverteilung τ ergibt sich mit $\eta > 0$ die DGL für die Geschwindigkeit u :

$$\begin{aligned}-\eta \frac{du}{dy} &= \rho_W g \sin(\alpha) \left[y - d + \beta \frac{T_W - T_a}{2} \left(\frac{y^2}{d} - d \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{du}{dy} &= -\frac{\rho_W g \sin(\alpha)}{\eta} \left[y - d + \beta \frac{T_W - T_a}{2} \left(\frac{y^2}{d} - d \right) \right]\end{aligned}$$

Unbestimmte Integration nach y liefert:

$$u(y) = -\frac{\rho_W g \sin(\alpha)}{\eta} \left[\frac{y^2}{2} - dy + \beta \frac{T_W - T_a}{2} \left(\frac{y^3}{3d} - dy \right) \right] + C_2$$

Mittels der Randbedingung zur Wandhaftung lässt sich die Integrationskonstante bestimmen:

$$\begin{aligned}u(y=0) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow u(y=0) &= -\frac{\rho_{\text{w}} g \sin(\alpha)}{\eta} \left[\frac{0^2}{2} - d0 + \beta \frac{T_{\text{w}} - T_{\text{a}}}{2} \left(\frac{0^3}{3d} - d0 \right) \right] + C_2 = C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= 0\end{aligned}$$

Somit erhält man das Geschwindigkeitsfeld $u(y)$ zu:

$$u(y) = -\frac{\rho_{\text{w}} g \sin(\alpha)}{\eta} \left[\frac{y^2}{2} - dy + \beta \frac{T_{\text{w}} - T_{\text{a}}}{2} \left(\frac{y^3}{3d} - dy \right) \right]$$

6. Aufgabe

- a) Stromlinien-Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten mit $dx_S, u(x_S, y_S|t) \neq 0$:

$$u dy_S = v dx_S$$

$$\Rightarrow \frac{dy_S}{dx_S} = \frac{v(x_S, y_S|t)}{u(x_S, y_S|t)} \stackrel{\text{stationär}}{=} \frac{v(x_S, y_S)}{u(x_S, y_S)}$$

Mittels der gegebenen Stromlinie kann die linke Seite der Stromlinien-DGL bestimmt werden:

$$\Rightarrow \frac{dy_S}{dx_S} = \frac{d(ax_S^2 + C)}{dx_S} = a \frac{d(x_S^2)}{dx_S} + \frac{dC}{dx_S} \stackrel{0}{=} 2ax_S \quad | a, C = \text{const}$$

Somit ergibt sich:

$$\Rightarrow 2ax_S = \frac{v(x_S, y_S)}{u(x_S, y_S)} \quad | a, x_S, u(x_S, y_S) \neq 0, \quad v(x_S, y_S) \text{ gegeben}$$

$$\Rightarrow u(x_S, y_S) = \frac{v(x_S, y_S)}{2ax_S}$$

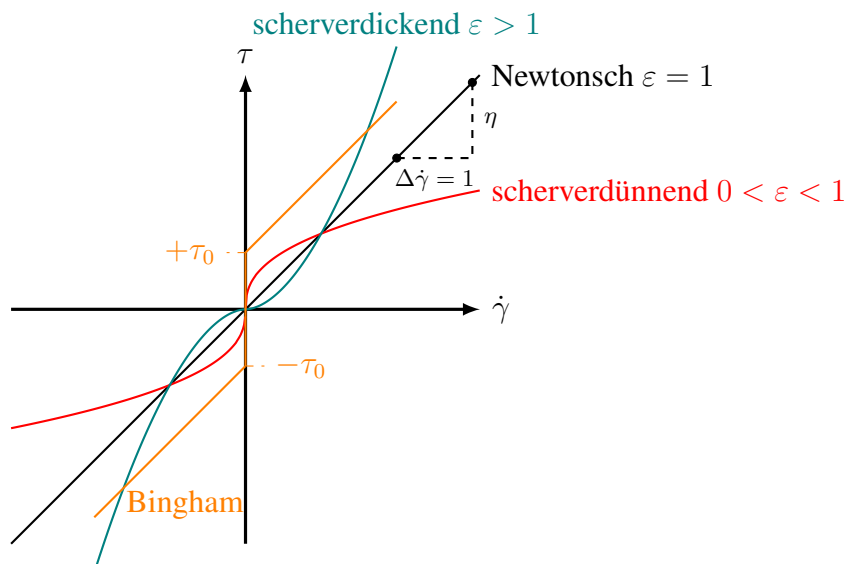
- b) **Kernaussage:** Die Bernoulli-Gleichung ist ein Ausdruck der **volumenspezifischen (= pro Volumen) mechanischen Energiebilanz entlang einer Stromlinie (regional)**, also für jeden Punkt auf einer Stromlinie zu allen Zeiten. Insofern Verluste, Arbeitsterme und instationäre Effekte vernachlässigbar sind, entspricht die Bernoulli-Gleichung einer Energieerhaltung entlang einer Stromlinie.

$$\underbrace{p_1}_{\text{stat.}} + \underbrace{\rho g z_1}_{\text{geo.}} + \underbrace{\frac{\rho}{2} v_1^2 - \frac{\rho}{2} \omega_1^2 r_1^2}_{\text{rot.}} + \underbrace{\Delta p_{1,2}^+}_{\text{Arbeit}} = \underbrace{p_2}_{\text{stat.}} + \underbrace{\rho g z_2}_{\text{geo.}} + \underbrace{\frac{\rho}{2} v_2^2 - \frac{\rho}{2} \omega_2^2 r_2^2}_{\text{rot.}} + \underbrace{\Delta p_{1,2}^-}_{\text{Verlust}} + \underbrace{\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds}_{\text{instationär}} \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Terme qualitativ interpretieren:

- Statischen Druck p_i und geodätischen Druck $\rho g z_i$
- Translatorisch dynamischer Druck $\frac{\rho}{2} v_i^2$ und rotatorisch (Scheinkraft) dynamischer Druck $-\frac{\rho}{2} \omega_i^2 r_i^2$
- Arbeitsdruck (z.B. Pumpe) $\Delta p_{1,2}^+$ und Verlustdruck (z.B. Reibung) $\Delta p_{1,2}^-$
- Instationärer Druck $\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$

- c) Skizze nach positiver Konvention:



Kriterien an die Skizze: Folgende Verläufe sind qualitativ richtig.

- Newtonsches Fluid, wie $\tau = \eta \dot{\gamma}$ mit $\eta = \text{const}$
- Scherverdünnendes Fluid, wie $\tau = k \text{sgn}(\dot{\gamma}) |\dot{\gamma}|^\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 1, k = \text{const}$
- Scherverdickendes Fluid, wie $\tau = k \text{sgn}(\dot{\gamma}) |\dot{\gamma}|^\varepsilon$ mit $1 < \varepsilon, k = \text{const}$
- Bingham-Fluid, wie $\tau = \text{sgn}(\dot{\gamma}) \tau_0 + \eta \dot{\gamma}$ für $|\tau| > \tau_0$, sonst $\dot{\gamma} = 0$ für $|\tau| \leq \tau_0$ mit $\eta = \text{const}$

Hinweis: Die Skizze des ersten Quadranten ist ausreichend. Die Signum-Funktion $\text{sgn}(\dots)$ gibt lediglich das Vorzeichen zurück.

- d) Das gegebene mechanische Stoffmodell für die Schubspannung wird folgendermaßen umgeformt, um mittels Koeffizientenvergleich die dynamische Viskosität η zu ermitteln.

$$\begin{aligned}\tau &= C \sqrt{\frac{du}{dy}} \quad \text{mit } \frac{du}{dy} > 0 \\ \Rightarrow \tau &= C \frac{1}{\sqrt{\frac{du}{dy}}} \left(\sqrt{\frac{du}{dy}} \right)^2 = C \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\frac{du}{dy}}}_{\eta(\dot{\gamma})}} \underbrace{\frac{du}{dy}}_{\dot{\gamma}} \stackrel{!}{=} \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \\ \Rightarrow \eta(\dot{\gamma}) &= C \frac{1}{\sqrt{\frac{du}{dy}}} = C \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}}}\end{aligned}$$

Mittels des ermittelten funktionalen Zusammenhangs zwischen Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ und der dynamischen Viskosität η , kann nun die Art des nicht-Newtonschen Fluids bestimmt werden. Bei steigender Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ nimmt die dynamische Viskosität η stetig ab. Somit handelt es sich um ein scherverdünnendes (strukturviskoses) Fluid.

$$\dot{\gamma} \uparrow \Rightarrow \eta(\dot{\gamma}) = C \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}}} \downarrow \Rightarrow \text{scherverdünnendes (strukturviskoses) Fluid}$$

- e) Die Reynoldssche Zerlegung beschreibt die Strömungsgröße f als Summe aus zeitlichem Mittelwert $\bar{f}$ und Schwankungsanteil f' , wobei die Argumente $\vec{r}$ für Orts- und t für die Zeitabhängigkeit stehen.

$$f(\vec{r}, t) = \bar{f}(\vec{r}) + f'(\vec{r}, t)$$

Die Reynoldssche Mittelung ist durch die zeitlich-integrale Mittelung über ein hinreichend langes Zeitintervall Δt nach folgender Definitionsgleichung gegeben.

$$\bar{f}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(\vec{r}, t) dt$$

- f) Mit der Hilfe der Rechenregeln für die Reynoldssche Mittelung kann der gesuchte Ausdruck wie folgt hergeleitet und vereinfacht werden, wobei im Allgemeinen $\overline{f'g'} \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\overline{fg} &= \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')} && | \text{ausmultiplizieren} \\ &= \overline{\bar{f}\bar{g} + f'\bar{g} + \bar{f}g' + f'g'} && | \text{Additivität } \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \\ &= \overline{\bar{f}\bar{g}} + \overline{f'\bar{g}} + \overline{\bar{f}g'} + \overline{f'g'} && | \bar{f} \text{ und } \bar{g} \text{ zeitlich konstant und } \bar{\bar{f}} = \bar{f}. \\ &= \bar{f}\bar{g} + \overline{f'\bar{g}} + \overline{\bar{f}g'} + \overline{f'g'} && | \overline{f'}, \overline{g'} = 0 \text{ und } \overline{f'g'} \neq 0 \\ &= \bar{f}\bar{g} + \overset{0}{\overline{f'\bar{g}}} + \overset{0}{\overline{\bar{f}g'}} + \overline{f'g'} && \\ \Rightarrow \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}\end{aligned}$$