

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik II“

13. 03. 2025

1. Aufgabe (11 Punkte)

- a) • Einflussgrößen: $\rho, \eta, d_g, r, u_m, \omega$
(Alle Varianten von $\omega = 2\pi f = 1/t$ funktionieren, dank des Hinweis)
- Grunddimensionen: M, T, L
- Wiederkehrende Variablen: u_m, ρ, r (z.B.)

$$\Pi_1 = d_g \cdot u_m^{\alpha_1} \cdot \rho^{\beta_1} \cdot r^{\gamma_1}$$

$$M: 0 = 0 + 0\alpha_1 + 1\beta_1 + 0\gamma_1 \rightarrow \beta_1 = 0$$

$$T: 0 = 0 - 1\alpha_1 + 0\beta_1 + 0\gamma_1 \rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$L: 0 = 1 + 1\alpha_1 - 3\beta_1 + 1\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 = -1$$

$$\rightarrow \Pi_1 = \frac{d_g}{r}$$

$$\Pi_2 = \eta \cdot u_m^{\alpha_2} \cdot \rho^{\beta_2} \cdot r^{\gamma_2}$$

$$M: 0 = 1 + 0\alpha_2 + 1\beta_2 + 0\gamma_2 \rightarrow \beta_2 = -1$$

$$T: 0 = -1 - 1\alpha_2 + 0\beta_2 + 0\gamma_2 \rightarrow \alpha_2 = -1$$

$$L: 0 = -1 + 1\alpha_2 - 3\beta_2 + 1\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 = -1$$

$$\rightarrow \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho u_m r} = \left(\frac{\eta}{\rho u_m d_g} \cdot \frac{d_g}{r} = \frac{1}{Re_d} \cdot \Pi_1 \right)$$

$$\Pi_3 = \omega \cdot u_m^{\alpha_3} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot r^{\gamma_3}$$

$$M: 0 = 0 + 0\alpha_3 + 1\beta_3 + 0\gamma_3 \rightarrow \beta_3 = 0$$

$$T: 0 = -1 - 1\alpha_3 + 0\beta_3 + 0\gamma_3 \rightarrow \alpha_3 = -1$$

$$L: 0 = 0 + 1\alpha_3 - 3\beta_3 + 1\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 = 1$$

$$\Pi_3 = \omega \cdot \frac{r}{u_m}$$

$$\text{b) } \text{De} = \text{Re}_d \cdot \sqrt{\frac{d}{2r}} \\ \text{Wo} = \sqrt{2\pi \text{Re}_d \text{Sr}_d}$$

$$\text{c) } \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho u_m r} = \frac{\eta}{u_m \rho} \cdot \sqrt{\frac{2r}{d_g^3}} \cdot \sqrt{\frac{d_g^3}{2r}} \cdot \frac{1}{r} \\ \Leftrightarrow \Pi_2 = \frac{1}{\text{De}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{d_g^3}{r^3}}$$

$$\Pi_3 = \frac{\omega r}{u_m} = \frac{\omega r}{u_m} \cdot \frac{\rho}{\rho} \cdot \frac{\eta}{\eta} \cdot \frac{d_g^2}{d_g^2} = \frac{\omega \rho}{\eta} \cdot d_g^2 \cdot \frac{r}{d_g^2} \cdot \frac{\eta}{u_m \rho} \\ \Leftrightarrow \Pi_3 = \text{Wo}^2 \cdot \Pi_2 \cdot \frac{r^2}{d_g^2} = \text{Wo}^2 \cdot \frac{1}{\text{De}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{d_g}}$$

Die Kennzahlen beinhalten keine weiteren Informationen, da sie aus den selben Einflussgrößen und somit mit den gleichen Grunddimensionen bestimmt werden.

$$\text{d) } d' = 2d \\ \text{Geometriefaktor: } \frac{r}{d} = \text{const.} \rightarrow r' = 2r \\ \text{Womersley-Zahl: } \text{Wo}' = \text{Wo} \\ \text{Dean-Zahl: } \text{De}' = \text{De}$$

Womersley-Zahl:

$$d \cdot \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}} = d' \cdot \sqrt{\frac{\rho' \omega'}{\eta'}} \text{ mit } d' = 2d \text{ und } \omega' = \omega \\ \Rightarrow \frac{\rho}{\eta} = 4 \frac{\rho'}{\eta'} \quad (*)$$

$$\left(\text{mit } \text{Re}_d = \frac{\rho u_m d}{\eta} \right)$$

Dean-Zahl:

$$\frac{u_m \rho}{\eta} \sqrt{\frac{d^3}{r}} = \frac{u'_m \rho'}{\eta'} \sqrt{\frac{d'^3}{r'}}$$

Mit (*) und $d' = 2d$:

$$u_m' = 2u_m$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: lokale Impulsänderung pro Einheitsvolumen

$\rho (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})$: konvektive Impulsänderung pro Einheitsvolumen

$-\nabla p$: Druckkräfte pro Einheitsvolumen

$\eta \Delta \vec{v}$: Reibungskräfte pro Einheitsvolumen

$\rho \vec{g}$: Volumenkräfte pro Einheitsvolumen

In schleichenden Strömungen können die konvektiven Impulsänderungen vernachlässigt werden.

b) Komponentenschreibweise der Impulserhaltungsgleichung (nicht notwendigerweise anzuführen):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g_z$$

Stationäre Strömung: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

2D: $w = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

Trägheitsterme für schleichende Strömung vernachlässigen:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$g_x = 0$$

Schleichende Strömung:

Gemeinsam mit dem Hinweis bleiben über:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \end{aligned}$$

c) Die Geschwindigkeit wird durch zweifache Integration der x -Impulsgleichung berechnet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \\ u(x, y) &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2\end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}y = 0 &: u = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ y = h(x) &: \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h(x) \\ \rightarrow u(x, y) &= -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h^2(x) \left(2 - \frac{y}{h(x)}\right) \frac{y}{h(x)}\end{aligned}$$

Der Druckgradient wird über Integration der y -Impulsgleichung und anschließender Ableitung in x -Richtung berechnet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \\ \int_p^{p(h(x)=p_a)} \partial p &= \int_y^{y=h(x)} -\rho g \partial y \\ p &= p_a + \rho g (h(x) - y) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung zu

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\eta} \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x} h^2(x) \left(2 - \frac{y}{h(x)}\right) \frac{y}{h(x)}.$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= B \int_0^{h(x)} u(x, y) dy \neq f(x) \\ \dot{V} &= -B \frac{1}{2\eta} \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x} h^2(x) \left[\frac{2}{h(x)} \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h^2(x)} \right]_0^{h(x)} \\ \dot{V} &= -B \frac{1}{3\eta} \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x} h^3(x)\end{aligned}$$

Die Gleichung ist gültig für $x \ll 0$ (ausreichende Entfernung zur Hinterkante)

3. Aufgabe (11 Punkte)

a) Parallelströmung: $F(z) = u_\infty z$ mit $u_\infty > 0$

Wirbel: $F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$ mit $\Gamma > 0$

Senke: $F(z) = -\frac{E}{2\pi} \ln z$ mit $E > 0$

$$F(z) = u_\infty z + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z - \frac{E}{2\pi} \ln z \quad \text{mit } u_\infty, E, \Gamma > 0$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad F(z) &= u_\infty r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r e^{i\varphi} - \frac{E}{2\pi} \ln r e^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow F(z) = u_\infty r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\ln r + i\varphi) \cdot \frac{i\Gamma - E}{2\pi} \\ &\Leftrightarrow F(z) = u_\infty r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{2\pi} (i\Gamma \ln r - E \ln r - \Gamma \varphi - iE\varphi) \end{aligned}$$

$$\Psi = \operatorname{Im}(F(z)) = u_\infty r \sin \varphi + \frac{1}{2\pi} (\Gamma \ln r - E\varphi)$$

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = u_\infty \cos \varphi - \frac{E}{2\pi r} \\ v_\varphi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\left(u_\infty \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right) \end{aligned}$$

c) Staupunkt: $v_r = v_\varphi = 0$

$$v_r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{E}{2\pi u_\infty \cos \varphi} (*) \quad (\text{Nur gültig wenn } \varphi \text{ **nicht** zwischen } \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3\pi}{2})$$

$$v_\varphi = 0$$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} \varphi = -\arctan\left(\frac{\Gamma}{E}\right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{E}{2\pi u_\infty \cos\left(\arctan\left(\frac{\Gamma}{E}\right)\right)} \quad (\text{mit } \cos \varphi = \cos(-\varphi))$$

$$\left(r = \frac{E}{2\pi u_\infty} \sqrt{1 + \frac{\Gamma^2}{E^2}}\right) \quad (\text{Altern. Schreibweise})$$

d) $\dot{V} = B(\Psi_1 - \Psi_2)$ (Punkt für korrekte Formel für $\dot{V}$)

$$\text{Polarkoordinaten für Punkte: } r = \sqrt{\frac{-1^2}{\sqrt{2}} + \frac{1^2}{\sqrt{2}}} = 1, \quad \varphi = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\Psi_1 = \Psi(r=1, \varphi = \frac{3\pi}{4}) = u_\infty \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} \left(\Gamma \cdot 0 - \frac{3\pi}{4} E\right)$$

$$\Psi_2 = \Psi(r=1, \varphi = \frac{5\pi}{4}) = u_\infty \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} \left(\Gamma \cdot 0 - \frac{5\pi}{4} E\right)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = B \cdot \left(\sqrt{2} u_\infty + \frac{E}{4}\right)$$

- e) Die Stärke des Potentialwirbels Γ ist nicht für die Regelung des Volumenstroms geeignet, sie ist nicht Bestandteil der bestimmten Gleichung für den Volumenstrom aus (d).

4. Aufgabe (10 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1}{\delta_0} &= \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta_0}\right) = \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right) d\left(\frac{y}{\delta_0}\right) \\ &= \left[\frac{y}{\delta_0} - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \delta_1 = \frac{1}{3}\delta_0 \\ \frac{\delta_2}{\delta_0} &= \int_0^1 \frac{u}{u_a} \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta_0}\right) = \left[\frac{2}{3} \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \delta_2 = \frac{1}{6}\delta_0\end{aligned}$$

b) Aus x-Impuls am Grenzschichttrand $y = \delta_0$ (Reibungsterme vernachlässigbar, $v \frac{\partial u}{\partial y}$ vernachlässigbar $v \ll u_a$)

$$\begin{aligned}\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} &= -\frac{dp}{dx} = p_0 \frac{2k}{l} \left(\frac{x}{l}\right) = 2 \frac{k}{l^2} x p_0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_a^2}{\partial x} &= \underbrace{p_0 \frac{2kx}{l^2}} \Rightarrow u_a^2 = \frac{2kp_0}{\rho l^2} x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Für } u_a(x=0) &= u_\infty \Rightarrow C = u_\infty^2 \\ \Rightarrow u_a &= \sqrt{u_\infty^2 + \frac{2kp_0}{\rho l^2} x^2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2}{dx} &= 0 \text{ da } \delta_0 = \text{konst.} \\ \frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} &= \frac{2\delta_2(x) + \delta_1(x)}{u_a(x)} \frac{du_a(x)}{dx} \\ \frac{du_a(x)}{dx} &= -\frac{dp}{dx} \frac{1}{\rho u_a(x)} \\ \frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} &= \frac{-\frac{2}{6}\delta_0 - \frac{1}{3}\delta_0}{\rho u_a^2(x)} \frac{dp}{dx} \\ \Rightarrow \tau_w(x) &= -\frac{2}{3}\delta_0 \frac{dp}{dx} = \frac{4}{3}\delta_0 \frac{p_0 k}{l^2} x\end{aligned}$$

d) Ablösung für $\tau_w(x) = 0$, da $\tau_w > 0 \Rightarrow$ keine Ablösung für $x > 0$ Ebenfalls zulässig:
Nutzung der notwendigen Bedingung für die Ablösung: $\frac{dp}{dx} > 0$

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) $c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{M^2 \gamma R T}{2} \quad (\text{Für } M = u / \sqrt{\gamma R T})$$

$$c_p T_0 = c_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Temperaturverhältnis:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Annahme: adiabate und reibungsfreie Strömung (isentrop)

b) Machzahl:

Gemessene Drücke: $p_{0,2}$, p_2

$$\frac{p_{0,2}}{p_2} = \left(\frac{T_{0,2}}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow M_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p_{0,2}}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)}$$

c) $p_1 = \frac{p_2}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)}$

Ruhedruck $p_{0,1} = p_{0,k}$, da isentrope Entspannung

$$\frac{p_{0,1}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_{0,k} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_{0,k} = \frac{p_2}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

d) Machzahl M_1 :

$$M_2^* = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/M_2^2}}$$

$$\rightarrow M_1^* = \frac{1}{M_2^*} = \sqrt{\frac{\gamma - 1 + 2/M_2^2}{\gamma + 1}}$$

$$\rightarrow M_1 = \sqrt{\frac{2}{\frac{\gamma+1}{(M_1^*)^2} - (\gamma - 1)}}$$

$$\rightarrow M_1 = \sqrt{\frac{2}{\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma-1+2/M_2^2} - (\gamma-1)}}$$

6. Aufgabe (8 Punkte)

- a) 1) • Turbulenter Umschlag z.B. durch:
- Turbulatoren
 - Stolperdraht
 - weitere...
- 2) In einer turbulenten Grenzschicht findet erhöhter Impulsaustausch in y-Richtung statt, sodass den wandnahen Anteilen der Grenzschicht mehr Energie zugeführt wird. Dies verzögert die Ablösung. (z.B., für Turbulenten Umschlag)
- b) Nein. Die Öffnung des Prandtlrohrs muss deutlich aus der Grenzschicht herausragen, damit der Staudruck in der reibungsfreien Strömung bestimmt werden kann. Der statische Druck ist zwar normal zur Körperoberfläche konstant, der Staudruck ist aber in der Grenzschicht aufgrund der niedrigeren Geschwindigkeiten gegenüber der Außenströmung reduziert.
- c) Für eine Potentialströmung muss gelten $\text{rot } \vec{v} = 0$.
- D.h. bei zweidimensionaler Strömung $\rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
- Hier: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{h},$
- also $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U}{h} \neq 0$, somit kann dieses Geschwindigkeitsprofil nicht zu einer Potentialströmung gehören.
- d) Die Zirkulation Γ um die Randkurve einer beliebigen ebenen Fläche entspricht dem doppelten Wirbelfluss durch diese Fläche.

$$\Gamma = \oint_C v_t ||d\vec{r}|| = 2 \int_A \omega_z dA$$

Der Satz von Thomson gilt in reibungsfreien, barotropen Strömungen mit konservativen Volumenkräften.

Der Satz von Thomson besagt, dass die Zirkulation entlang einer sich mit dem Fluid bewegenden, geschlossenen Kurve bezüglich der Zeit konstant ist, d.h.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$