

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

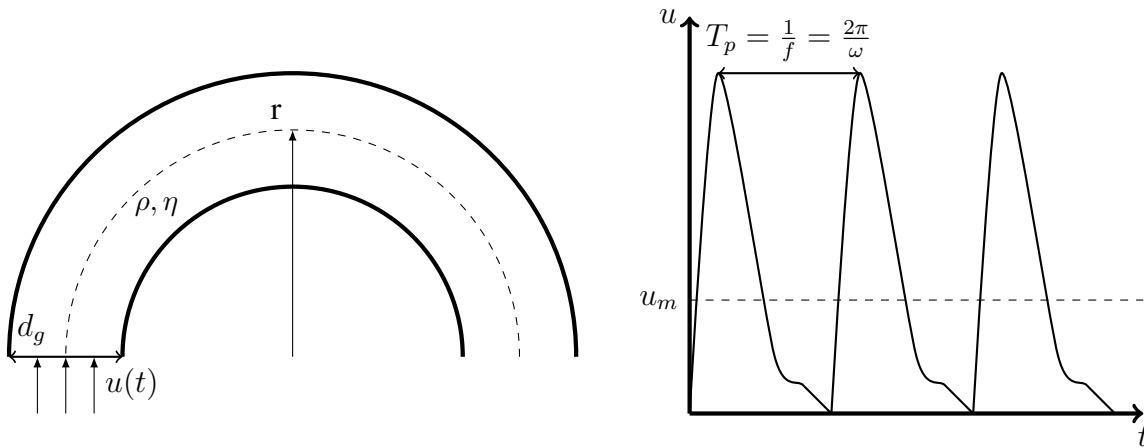
Klausur „Strömungsmechanik II“

13. 03. 2025

1. Aufgabe (11 Punkte)

Die größte Arterie des menschlichen Herz-Kreislaufsystems ist die Aorta. Ein Bestandteil der Aorta ist der sogenannte Aortenbogen, der einem um 180° gekrümmten Rohr gleicht. Ein Modell eines solchen Aortenbogens soll im Labor hinsichtlich der Dehnung seiner Gefäßwände untersucht werden.

Beim abgebildeten, mit ω pulsierenden Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit des Messfluids wird der Gefäßdurchmesser am Gefäßeingang d_g gemessen. Die Krümmung des Gefäßes hat den Radius r , das inkompressible Messfluid hat die Dichte ρ und die dynamische Viskosität η . Zeitlich gemittelt strömt das Fluid mit der Geschwindigkeit u_m .



- Bestimmen Sie die Kennzahl(en) des Problems mit Hilfe des Π -Theorems.
- Bestimmen Sie je einen Zusammenhang zwischen der Dean-Zahl De und der Womersleyzahl Wo mit der Reynoldszahl Re_d und der Strouhalzahl Sr_d in der Form $De = f(Sr_d, Re_d)$ und $Wo = f(Sr_d, Re_d)$.
- Führen Sie die Kennzahl(en) auf die in der Bio-Strömungsmechanik üblichen Kennzahlen De und Wo (siehe Hinweis) sowie ggf. Geometriefaktoren zurück. Beinhalten die Kennzahlen De und Wo mehr Informationen als Re_d und Sr_d ? Begründen Sie!
- Um eine einfachere Messung des Gefäßdurchmessers zu ermöglichen, wird der Gefäßdurchmesser des Modells verdoppelt, sodass $d' = 2d$. Wie kann das Experiment bei konstantem ω angepasst werden, wenn die Wo und De konstant bleiben sollen?

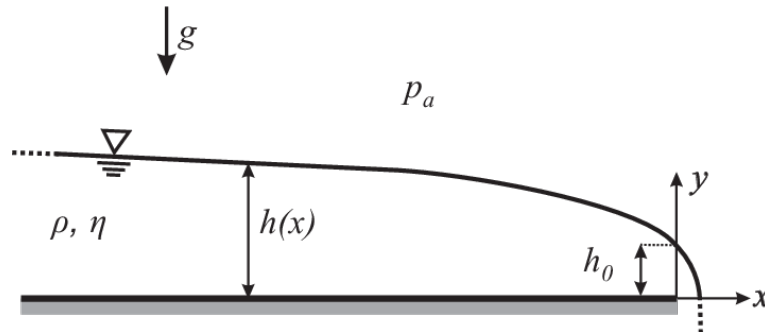
Hinweis:

- Dean-Zahl: $De = \frac{u_m \cdot \rho}{\eta} \sqrt{\frac{d_g^3}{2r}}$
- Womersley-Zahl: $Wo = d_g \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot \omega}{\eta}}$
- $\omega = 2\pi f$

Die Impulserhaltungsgleichung für eine instationäre, inkompressible Strömung lautet

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

- a) Geben Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme der Impulserhaltungsgleichung an. Welcher Term kann in einer schleichenden Strömung vernachlässigt werden?



Über eine große, horizontale Platte der Tiefe B fließt ein Flüssigkeitsfilm. Die Strömung wird durch Zufuhr eines konstanten Volumenstroms $\dot{V}$ weit von der Plattenhinterkante entfernt aufrecht erhalten. An der Plattenhinterkante strömt die Flüssigkeit ab. Es handelt sich um eine schleichende Strömung.

- b) Vereinfachen Sie die Impulserhaltungsgleichung für die oben beschriebene Strömung. Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit der Schritte Ihrer Vereinfachung.

Die schleichende Strömung im Flüssigkeitsfilm wird durch die folgenden Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g\end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ sowie den Volumenstrom $\dot{V}$.

Gegeben:

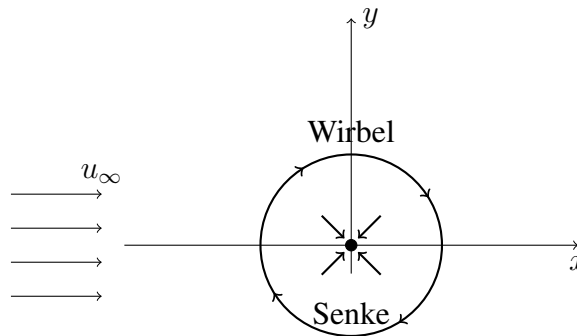
$$h(x), \rho, \eta, g, B$$

Hinweise:

- Die Filmströmung kann als zweidimensional und laminar angesehen werden. Effekte nahe der Hinterkante sind zu vernachlässigen.
- Die Reibung zwischen der umgebenden Luft und der Filmoberfläche kann vernachlässigt werden.
- $\rho g_y \gg \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

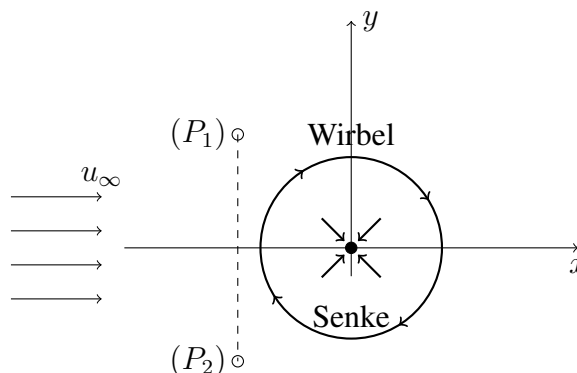
3. Aufgabe (11 Punkte)

Gegeben ist die Überlagerung einer Senke, eines Potentialwirbels und einer Parallelströmung.



- Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ auf, mit der sich das beschriebene Problem darstellen lässt. Geben Sie die Vorzeichen der Konstanten an, die in den Elementarfunktionen vorhanden sind.
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten v_r sowie v_φ .
- Bestimmen Sie die Lage der Staupunkte in Polarkoordinaten.

Die Potentialfunktion soll die Entnahme von Flüssigkeit in einem Industrieprozess beschreiben. Die Stärke des Potentialwirbels soll genutzt werden um den Fluidstrom im Prozess zu regeln.



- Bestimmen Sie den Volumenstrom, der zwischen P_1 und P_2 hindurchströmt in Abhängigkeit von u_∞ , Γ und E sowie der Dicke des Fluidstroms B .
- Ist die Stärke des Potentialwirbels eine geeignete Größe, um den Volumenstrom zu regeln? Begründen Sie anhand Ihrer Ergebnisse aus d).

Gegeben:

$$P_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der Folgeseite!

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$

Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$

Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$

Staupunktströmung: $F(z) = az^2$

Dipol: $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

Hinweise:

- Nehmen Sie an, dass die Konstanten der komplexen Elementarfunktionen bekannt sind.

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

- $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$

- Winkeltabelle:

φ	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin \varphi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

4. Aufgabe (10 Punkte)

In einer Plattengrenzschicht werden Geschwindigkeitsprofile und Druckverlauf vermessen. Der auf der Platte gemessene Druckverlauf wird durch die Beziehung

$$\frac{p(x)}{p_0} = 1 - k \left(\frac{x}{l} \right)^2 \quad \text{mit} \quad 0 < k = konst < 1$$

und die Geschwindigkeitsprofile werden durch

$$\frac{u(x, y)}{u_a(x)} = \left(\frac{y}{\delta_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad u_a(x=0) = u_\infty$$

wiedergegeben, wobei die Grenzschichtdicke δ_0 konstant ist.

- a) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke δ_1 und die Impulsverlustdicke δ_2 .
- b) Bestimmen Sie die Außengeschwindigkeit $u_a(x)$.
- c) Bestimmen Sie die Wandschubspannung $\tau_w(x)$ für $x > 0$.
- d) Kann diese Grenzschicht ablösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben: $p_0, k, \delta_0, l, u_\infty, \rho$

Hinweis: Die Integralbeziehung nach von Kármán lautet:

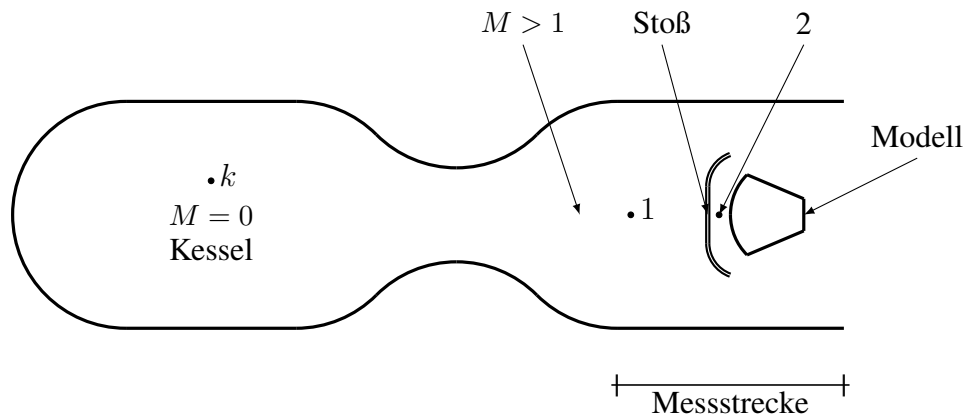
$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{(2\delta_2(x) + \delta_1(x))}{u_a(x)} \frac{du_a(x)}{dx} - \frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = 0$$

Die Grenzschichtgleichung (x -Impuls):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Aus einem Kessel strömt ein ideales Gas durch eine Lavaldüse und eine Messstrecke in die freie Atmosphäre. Der Düsenquerschnitt ist im Bereich der Messstrecke konstant. In diesem Teil der Düse befindet sich zentriert ein Modell einer Raumfähre, vor der sich ein abgelöster Stoß ausbildet. Dieser wird im Folgenden auf der Symmetrieachse als abgelöster senkrechter Stoß approximiert. Der gesamte Strömungsvorgang ist stationär.



- Leiten Sie ausgehend von der Energiegleichung das Verhältnis T/T_0 in Abhängigkeit von der Machzahl her. Erläutern Sie, welche Annahmen Ihrem Ansatz zur Herleitung zugrunde liegen.
- Bestimmen Sie die Machzahl hinter dem senkrechten Verdichtungsstoß als Funktion des gemessenen Ruhedrucks im Staupunkt des Modells $p_{0,2}$ und des statischen Drucks an der Modelloberfläche p_2 . (siehe Skizze).
- Bestimmen Sie den Ruhedruck $p_{0,k}$ im Kessel als Funktion der gegebenen Größen sowie der Machzahl M_1 .
- Bestimmen Sie die Machzahl vor dem Verdichtungsstoß M_1 als Funktion der gegebenen Größen sowie der Machzahl M_2 .

Gegeben: $p_2, p_{0,2}, \gamma$

- $(M^*)^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M^2}}$, $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$
- Druckverhältnis über den senkrechten Stoß: $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)$
- Isentropenbeziehungen: $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

Hinweis:

Die Abmessungen des Modells sind im Verhältnis zum Düsenquerschnitt vernachlässigbar klein.

6. Aufgabe (8 Punkte)

- a) 1) Nennen Sie zwei Optionen von technischen Möglichkeiten mit denen die Ablösung einer laminaren Grenzschicht verzögert werden kann.
2) Erklären Sie den Wirkmechanismus einer dieser Optionen.
- b) Darf sich die Öffnung eines in der Luftfahrt zur Staudruckmessung eingesetzten Prandtlrohrs innerhalb der Grenzschicht befinden? Begründen Sie Ihre Antwort!
- c) Kann eine Couette-Strömung mit den Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y) = U \frac{y}{h}$ und $v(x, y) = 0$ als Potentialströmung beschrieben werden? Belegen Sie Ihre Antwort rechnerisch.
- d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zirkulation Γ und dem Wirbelfluss Ω in der Ebene? Unter welchen Bedingungen gilt der Satz von Thomson? Was besagt der Satz von Thomson?