....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

<u>Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik II“</u>

16. 03. 2026

1. Aufgabe (14 Punkte)

a)
- Einflussgrößen: $c, \lambda, \rho, g, H, \sigma$ $\Rightarrow K = 6$
- Grunddimensionen: M, T, L $\Rightarrow r = 3$
- $m = k - r = 3$ $\Rightarrow$ 3 Kennzahlen gesucht

b) $\Pi_1 = c \cdot \lambda^{\alpha_1} \cdot \rho^{\beta_1} \cdot g^{\gamma_1}$

$$\begin{aligned}
T: &\quad 0 = -1 + 0\alpha_1 + 0\beta_1 + -2\gamma_1 \rightarrow \gamma = -1/2 \\
M: &\quad 0 = 0 + 0\alpha_1 + 1\beta_1 + 0\gamma_1 \rightarrow \beta_1 = 0 \\
L: &\quad 0 = 1 + 1\alpha_1 - 3\beta_1 + 1\gamma_1 \rightarrow \alpha_1 = -1/2
\end{aligned}$$

$\rightarrow \Pi_1 = \frac{c}{\sqrt{g\lambda}}$

$\Pi_2 = \sigma \cdot \lambda^{\alpha_2} \cdot \rho^{\beta_2} \cdot g^{\gamma_2}$

$$\begin{aligned}
M: &\quad 0 = 1 + 0\alpha_2 + 1\beta_2 + 0\gamma_2 \rightarrow \beta_2 = -1 \\
T: &\quad 0 = -2 + 0\alpha_2 + 0\beta_2 - 1\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 = -1 \\
L: &\quad 0 = 0 + 1\alpha_2 - 3\beta_2 + 1\gamma_2 \rightarrow \alpha_2 = -2
\end{aligned}$$

$\Pi_2 = \frac{\sigma}{\rho g \lambda^2}$

$\Pi_3 = H \cdot \lambda^{\alpha_3} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot g^{\gamma_3}$

$$\begin{aligned}
T: &\quad 0 = -0 + 0\alpha_3 + 0\beta_3 + -2\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 = 0 \\
M: &\quad 0 = 0 + 0\alpha_3 + 1\beta_3 + 0\gamma_3 \rightarrow \beta_3 = 0 \\
L: &\quad 0 = 1 + 1\alpha_1 - 3\beta_1 + 1\gamma_1 \rightarrow \alpha_3 = -1
\end{aligned}$$

$\rightarrow \Pi_3 = \frac{H}{\lambda}$

c)

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= f(\Pi_2, \Pi_3) \\
\frac{c}{\sqrt{g\lambda}} &= f\left(\frac{\sigma}{\rho\, g\, \lambda^2},\ \frac{H}{\lambda}\right) \\
c &= \sqrt{g\lambda} \cdot f\left(\frac{\sigma}{\rho\, g\, \lambda^2},\ \frac{H}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

d) Ausgehend von Lösung von c):

1) Sehr tiefe Flüssigkeit ($\Pi_3 \to \infty$), Wenn $H \to \infty$ ist f nicht mehr von Π_3 abhängig (Eine weitere Zu- oder Abnahme von H hätte einen verschwindend geringen Einfluss):

$$c_{\text{tief}} = \sqrt{g\lambda} \cdot f_1\left(\frac{\sigma}{\rho g \lambda^2}\right)$$

2) Zusätzlich Oberflächenspannung vernachlässigbar ($\Pi_2 \to 0$), f_1 strebt gegen Konstante C_2:

$$c = C_2\sqrt{g\lambda}$$

Haupteinfluss: g, λ (Schwerewellen).

3) Zusätzlich Gravitation vernachlässigbar ($\Pi_2 \to \infty$), f_1 muss proportional zu $\sqrt{\Pi_2}$ wachsen:

$$c = \sqrt{g\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g \lambda^2}} \cdot C_1 = C_1\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda}}$$

Haupteinfluss: σ, ρ, λ (Kapillarwellen).

2. Aufgabe (16 Punkte)

a) Zunächst: Geschwindigkeitsfeld durch zweifache Integration der Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \Rightarrow u(x,y) &= \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2 \end{aligned}$$

Randbedingung I: $u(x, y = 0) = u_\infty$
Randbedingung II: $u(x, y = h(x)) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x,y) &= \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2 + \left(-\frac{u_\infty}{h(x)} - \frac{h(x)}{2\eta}\frac{dp}{dx}\right) y + u_\infty \\ \Leftrightarrow u(x,y) &= \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - h(x)y\right) - \frac{u_\infty}{h(x)}y + u_\infty \end{aligned}$$

Volumenstrom durch Integration des Geschwindigkeitsfelds in y-Richtung von Platte bis Extruderkontur:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= B\int_0^{h(x)} u(x,y)dy \\ \frac{\dot{V}}{B} &= \int_0^{h(x)} \left(\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - h(x)y\right) - \frac{u_\infty}{h(x)}y + u_\infty\right) dy \\ &= \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(-\frac{h(x)^3}{6}\right) + \frac{u_\infty h}{2} \\ \dot{V} &= B\left[\frac{u_\infty h(x)}{2} - \frac{h(x)^3}{12\eta}\frac{dp}{dx}\right] \end{aligned}$$

b) Druckverlauf durch Integration des Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{B} &= -\frac{h(x)^3}{12\eta}\frac{dp}{dx} + \frac{u_\infty h(x)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{V}}{B} - \frac{1}{2}u_\infty h(x) &= \frac{dp}{dx}h(x)^3\left(-\frac{1}{12\eta}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} &= 6\eta\left(\frac{u_\infty}{h(x)^2} - \frac{2}{h(x)^3}\frac{\dot{V}}{B}\right) \end{aligned}$$

Integrieren von 0 bis x, für h(x) Kontur aus AS einsetzen:

$$\begin{aligned}
p(x) - p(x=0) &= 6\eta \int_0^x \frac{u_\infty}{h_1^2} e^{2\frac{x}{l}} - \frac{2}{h_1^3} e^{3\frac{x}{l}} \frac{\dot{V}}{B}\, dx \\
\Rightarrow p(x) - p_1 &= 6\eta \left[\frac{u_\infty}{h_1^2} \frac{l}{2} e^{2\frac{x}{l}} - \frac{2}{h_1^3} \frac{l}{3} e^{3\frac{x}{l}} \frac{\dot{V}}{B} \right]_0^x \\
p(x) &= 6\eta \left[\frac{u_\infty}{h_1^2} \frac{l}{2} \left(e^{2\frac{x}{l}} - 1 \right) - \frac{2}{h_1^3} \frac{l}{3} \frac{\dot{V}}{B} \left(e^{3\frac{x}{l}} - 1 \right) \right] + p_1 \\
&= 6\eta l \left[\frac{u_\infty}{2h_1^2} \left(e^{2\frac{x}{l}} - 1 \right) - \frac{2}{3h_1^3} \frac{\dot{V}}{B} \left(e^{3\frac{x}{l}} - 1 \right) \right] + p_1
\end{aligned}$$

c) Leistung P ist gesucht. Bestimmung durch $P = F_R \cdot u_\infty$.

$$\begin{aligned}
F_R &= -B\eta \int_0^l \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dx \\
a): \qquad u(x,y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(y^2 - h(x) y \right) - \frac{u_\infty}{h(x)} y + u_\infty \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(2y - h(x) \right) - \frac{u_\infty}{h(x)} \\
h(x) = h_1 e^{-\frac{x}{l}} \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(2y - e^{-\frac{x}{l}} h_1 \right) - \frac{u_\infty}{e^{-\frac{x}{l}} h_1} \\
\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} &= \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(-e^{-\frac{x}{l}} h_1 \right) - \frac{u_\infty}{e^{-\frac{x}{l}} h_1} \\
F_R &= B\eta \int_0^l \left(\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} e^{-\frac{x}{l}} h_1 + \frac{u_\infty}{e^{-\frac{x}{l}} h_1} \right) dx \\
&= B\eta \int_0^l \left(\frac{1}{2\eta} \frac{\dot{V}}{B} \frac{10\eta}{h_1^3} e^{-2\frac{x}{l}} h_1 + \frac{u_\infty}{h_1} e^{\frac{x}{l}} \right) dx \\
&= B\eta \left[\frac{u_\infty l}{h_1} e^{\frac{x}{l}} - \frac{l}{4\eta} \frac{\dot{V}}{B} \frac{10\eta}{h_1^3} e^{-2\frac{x}{l}} h_1 \right]_0^l \\
&= \eta \left[\frac{B u_\infty l}{h_1} (e-1) - \frac{5l\dot{V}}{2h_1^2} \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \right] \\
P = F_R \cdot u_\infty &= \frac{u_\infty \eta}{h_1} \left[B u_\infty l\, (e-1) - \frac{5l\dot{V}}{2h_1} \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

Alternativlösung: $\frac{\partial p}{\partial x}$ aus b)

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= 6\eta\left[\frac{u_\infty}{h_1^2}e^{2\frac{x}{l}} - \frac{2\dot{V}}{Bh_1^3}e^{3\frac{x}{l}}\right] \\
\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} &= \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(-e^{-\frac{x}{l}}h_1\right) - \frac{u_\infty}{h_1}e^{\frac{x}{l}} \\
&= 3\left[\frac{u_\infty}{h_1^2}e^{2\frac{x}{l}} - \frac{2\dot{V}}{Bh_1^3}e^{3\frac{x}{l}}\right]\left(-e^{-\frac{x}{l}}h_1\right) - \frac{u_\infty}{h_1}e^{\frac{x}{l}} \\
&= -\frac{3u_\infty}{h_1}e^{\frac{x}{l}} + \frac{6\dot{V}}{Bh_1^2}e^{2\frac{x}{l}} - \frac{u_\infty}{h_1}e^{\frac{x}{l}} \\
F_R &= -B\eta\int_0^l\left(-\frac{4u_\infty}{h_1}e^{\frac{x}{l}} + \frac{6\dot{V}}{Bh_1^2}e^{2\frac{x}{l}}\right)dx \\
&= B\eta\left[\frac{4u_\infty l}{h_1}e^{\frac{x}{l}} - \frac{3\dot{V}l}{Bh_1^2}e^{2\frac{x}{l}}\right]_0^l \\
&= \frac{\eta\,l}{h_1}\left[4Bu_\infty(e-1) - \frac{3\dot{V}}{h_1}(e^2-1)\right] \\
P = F_R\cdot u_\infty &= \frac{\eta\,l\,u_\infty}{h_1}\left[4Bu_\infty(e-1) - \frac{3\dot{V}}{h_1}(e^2-1)\right]
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe (18 Punkte)

a) Damit die Superposition aus Parallelströmung und Quellenverteilung einen geschlossenen Körper erzeugt, muss das Integral der Quellenstärke zu null werden:

$$\int_0^L q(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Nachweis:

$$\begin{aligned}
\int_0^L q(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= q_0 \int_0^L \left(1 - \frac{2\xi}{L}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= q_0 \left[\xi - \frac{\xi^2}{L}\right]_0^L \\
&= q_0 \left(L - \frac{L^2}{L}\right) \\
&= q_0 (L - L) \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
F(z) &= U_\infty\, z + \int_0^L \frac{q(\xi)}{2\pi} \ln(z - \xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad z \notin [0, L] \\
w(z) &= \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = u - iv \\
&= U_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(\xi)}{z - \xi}\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

mit $z - \xi = (x - \xi) + \mathrm{i}\, y$ erweitern:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z - \xi} &= \frac{(x - \xi) - \mathrm{i}\, y}{(x - \xi)^2 + y^2} \\
u(x, y) &= \mathrm{Re}(w) \\
v(x, y) &= -\,\mathrm{Im}(w) \\
\Rightarrow u(x, y, q(\xi)) &= U_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(\xi)\,(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2}\,\mathrm{d}\xi \\
\Rightarrow v(x, y, q(\xi)) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(\xi)\, y}{(x - \xi)^2 + y^2}\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

c) Symmetrie des Strömungsfelds um die x-Achse $\Rightarrow$ Staupunkt bei $y = 0$.
Mit $y = 0$ vereinfacht sich der Nenner: $(x - \xi)^2 + y^2 = (x - \xi)^2$:

$$u(x, 0) = U_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(\xi)}{x - \xi}\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Einsetzen von $q(\xi) = q_0\left(1 - \frac{2\xi}{L}\right)$ und Aufspaltung:

$$u(x,0) = U_\infty + \frac{q_0}{2\pi}\underbrace{\int_0^L \frac{\mathrm{d}\xi}{x-\xi}}_{I_1} - \frac{q_0}{\pi L}\underbrace{\int_0^L \frac{\xi}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi}_{I_2}$$

Auswerten von I_1:

$$I_1 = \left[-\ln|x-\xi|\right]_0^L = \ln\frac{|x|}{|x-L|}$$

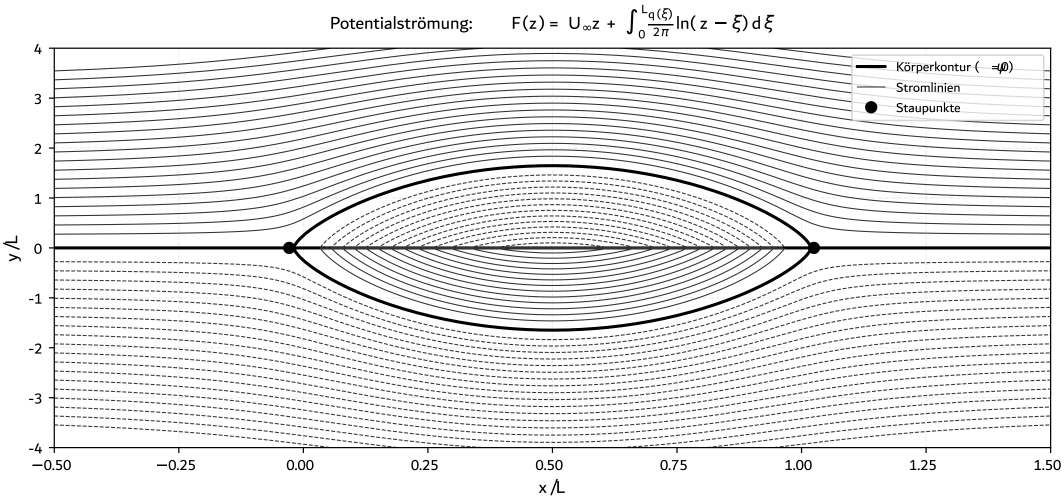
Auswerten von I_2 mit dem gegebenen Hinweis:

$$I_2 = x\ln\frac{|x|}{|x-L|} - L$$

Einsetzen und zusammenfassen:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= U_\infty + \frac{q_0}{2\pi}\ln\frac{|x|}{|x-L|} - \frac{q_0}{\pi L}\left(x\ln\frac{|x|}{|x-L|} - L\right) \\ &= U_\infty + \frac{q_0}{\pi} + \frac{q_0}{2\pi}\left(1 - \frac{2x}{L}\right)\ln\frac{|x|}{|x-L|} \overset{!}{==} 0 \end{aligned}$$

d)



e) Komplexe Potentialfunktion:

$$F(z) = U_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln(z) - \frac{E}{2\pi} ln(z - L)$$

Gleicher Volumenstrom bei linearem Verlauf:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{L/2} q_0 \left(1 - \frac{2\xi}{L}\right) \mathrm{d}\xi \\ &= q_0 \left[\xi - \frac{\xi^2}{L}\right]_0^{L/2} \\ &= q_0 \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) \\ \Rightarrow \quad E &= \frac{q_0\, L}{4} \end{aligned}$$

f) (i) Die Konturstromlinie ergibt sich aus der Stromfunktion $\Psi = \mathrm{Im}(F(z))$ der Strömung.

(ii) Staupunkte x_s, y_s bestimmen aus Geschwindigkeitsverteilung

(iii) Am Staupunkt $\Psi = \Psi_K$ auswerten:

(iv) Die Konturstromlinie ist damit die Menge aller Punkte (x, y) mit:

$$\Psi(x, y) = \Psi_K$$

Ebenfalls akzeptabel: Anderes Koordinatensystem (φ, r) oder auch **korrektes** Berechnen der Konturstromlinie

4. Aufgabe (16 Punkte)

a)

$$
\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{0\text{(AS)}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \underbrace{\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{0\text{ (Reibungsfreie Aussenstroemung)}} \\
-\rho u\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho u\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad u(x) = bx^m
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= bmx^{m-1} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\rho bx^m bmx^{m-1} \\
&= -\rho b^2 m x^{2m-1} \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\rho b^2\beta}{2-\beta}x^{\frac{3\beta-2}{2-\beta}}
\end{aligned}
$$

c) Geschwindigkeitsprofil: Nutze Randbedingungen (RB) für Koeffizienten a_i.

Randbedingungen:

1. RB: Haftbedingung: $u|_{\frac{y}{\delta}=0} = 0 \quad (I)$
2. RB: Grenzschichtrand: $u|_{\frac{y}{\delta}=1} = u_a \quad (II)$
3. RB: x-Impulsgleichung an der Wand: $\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right|_{\frac{y}{\delta}=0} = \eta \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\frac{y}{\delta}=0} \quad (III)$
4. RB: Glatter Übergang am Grenzschichtrand: $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\frac{y}{\delta}=1} = 0 \quad (IV)$

Aus (I) : $a_0(x) = 0$.

Aus (II) : $a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = 1 \qquad (V)$
Aus (IV) : $a_1(x) + 2a_2(x) + 3a_3(x) = 0 \qquad (VI)$

Aus (III) :

$$
\begin{aligned}
-\frac{\rho b^2\beta}{(2-\beta)}x^{\frac{3\beta-2}{2-\beta}} &= \frac{2u_a\eta a_2(x)}{\delta^2} \\
a_2(x) &= -\frac{\rho b^2\beta}{(2-\beta)}\frac{\delta^2}{2\eta b x^{\frac{\beta}{2-\beta}}}x^{\frac{3\beta-2}{2-\beta}} \\
a_2(x) &= -\frac{\rho b\beta\delta^2}{2(2-\beta)\eta}x^{\frac{2\beta-2}{2-\beta}} \qquad (VII)
\end{aligned}
$$

(VI) nach a_1 umstellen und zusammen mit a_2 aus (VII) in (V) einsetzen:

$$\begin{aligned} a_3(x) &= -\frac{1}{2} - \frac{a_2(x)}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\rho b \beta \delta^2}{4(2-\beta)\eta} x^{\frac{2\beta-2}{2-\beta}} \end{aligned}$$

a_2 und a_3 in (VI) :

$$a_1(x) = -2a_2(x) - 3a_3(x) = \frac{3}{2} + \frac{\rho b \beta \delta^2}{4(2-\beta)\eta} x^{\frac{2\beta-2}{2-\beta}}$$

Das Geschwindigkeitsprofil mit eingesetzten a_i (nicht gefragt):

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \left(\frac{3}{2} + \frac{\rho b \beta \delta^2}{4(2-\beta)\eta} x^{\frac{2\beta-2}{2-\beta}}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{\rho b \beta \delta^2}{2(2-\beta)\eta} x^{\frac{2\beta-2}{2-\beta}} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\rho b \beta \delta^2}{4(2-\beta)\eta} x^{\frac{2\beta-2}{2-\beta}}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

d) Ja, die GS ist ablösegefährdet. Mehrere Argumentationsweisen:

- Argumentation über Geschwindigkeitsgradient: Die GS ist ablösegefährdet, da die Strömung im Diffusor verzögert wird. Nachweis über:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a}{\partial x} &= m b x^{m-1} \\ m &= \frac{\beta}{2-\beta} \\ \Rightarrow 0 \geq m \geq -\frac{1}{2} & \\ \text{mit } b > 0 \Rightarrow m b x^{m-1} &< 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u_a}{\partial x} &< 0 \end{aligned}$$

- Argumentation über Druckgradient: Bei positivem Druckgradient ist die Strömung ablösegefährdet.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\rho b^2 \beta}{2-\beta} x^{\frac{3\beta-2}{2-\beta}} \\ x^{\frac{3\beta-2}{2-\beta}} &> 0 \\ \rho b^2 \beta &< 0 \\ 2-\beta &> 0 \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0 & \end{aligned}$$

- Möglich mit mehr Aufwand: Zeigen dass Steigung des u/u_a Profils auf Platte negativ sein kann.

e) Wenn man dem gleichen Polynomansatz folgt, sind hier auch die gleichen Randbedingungen anwendbar. Somit erhält man die <u>gleichen Koeffizienten</u> a_i und die beiden Grenzschichten <u>unterscheiden sich nicht</u>.

5. Aufgabe (22 Punkte)

a) Der kritische Zustand ist ein Referenzzustand, der erreicht wird, wenn man ein Fluid isentrop auf $M = 1$ beschleunigt oder verzögert.

$$
\begin{aligned}
\text{Energiegleichung: } h + \frac{u^2}{2} &= h^* + \frac{u^{*2}}{2} \\
c_p T + \frac{u^2}{2} &= c_p T^* + \frac{u^{*2}}{2} \\
\text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \text{ und } c^2 &= \gamma R T : \\
c_p T &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{c^2}{\gamma R} = \frac{c^2}{\gamma - 1} \\
\Rightarrow \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} &= \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{u^{*2}}{2} \qquad \Big| \cdot (\gamma - 1) \text{ und } u^* = c^* \\
\Leftrightarrow c^2 + \frac{\gamma - 1}{2} u^2 &= \frac{\gamma + 1}{2} c^{*2} \\
\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma - 1}{2} &= \frac{\gamma + 1}{2} \frac{1}{M^{*2}} \\
\Rightarrow M^* &= \sqrt{\frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}} \\
\Bigg[\quad &= \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M^2}}} \quad \Bigg] \\
\lim_{M \to 0} &= \sqrt{\frac{2.4}{0.4 + \infty}} \to 0 \\
\lim_{M \to \infty} &= \sqrt{\frac{2.4}{0.4}} = \sqrt{6} \, [\approx 2.45]
\end{aligned}
$$

b) Bekannt über Zustand 3: $\rho_3,\ p_{03}$
Außerdem: T_0 ist konstant, auch über Stoß: $T_{03} = T_{01}$
Gesucht: $u_3,\ p_3,\ T_3$

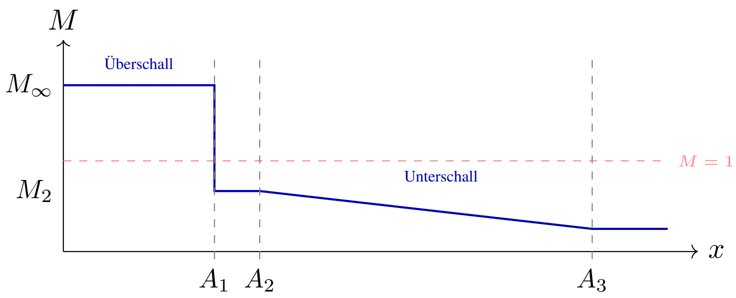
$$\begin{aligned}
\text{Ideales Gas: } p_3 &= \rho_3 R T_3 \\
\text{Ruhetemperatur: } T_{03} &= T_3 + \frac{u_3^2}{2c_p} \\
\text{Isentropenbeziehung: } \frac{p_{03}}{p_3} &= \left(\frac{T_{03}}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\Rightarrow p_{03} &= \rho_3 R T_3 \left(\frac{T_{03}}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\Leftrightarrow p_{03} &= \rho_3 R T_{01}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} T_3^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
\Rightarrow T_3 &= \left(\frac{\rho_3 R}{p_{03}}\right) T_{01}^{\gamma} \\
\Rightarrow p_3 &= p_{03}\left(\frac{\rho_3 R T_{03}}{p_{03}}\right)^{\gamma} \\
\frac{u_3^2}{2c_p} &= T_{01} - T_3 \\
u_3 &= \sqrt{2c_p\left(T_{01} - T_3\right)} \\
&= \sqrt{2\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\left(T_{01} - \left(\frac{\rho_3 R}{p_{03}}\right) T_{01}^{\gamma}\right)}
\end{aligned}$$

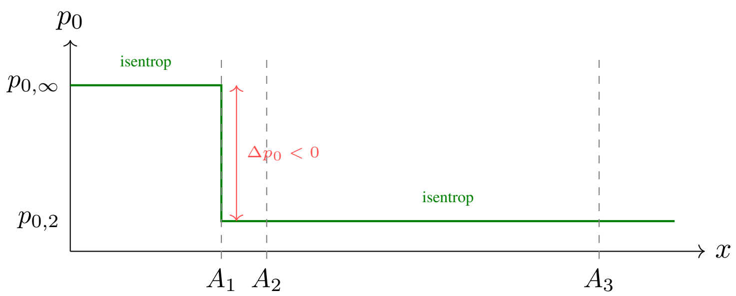
c)

$$\begin{aligned}
\text{Konti: } \rho_2 u_2 A_2 &= \rho_3 u_3 A_3 \\
\Rightarrow \frac{A_3}{A_2} &= \frac{u_3}{u_2}\frac{\rho_3}{\rho_2} \\
\Rightarrow \frac{A_3}{A_2} &= \frac{u_3}{u_2}\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
\text{Energiegleichung: } \frac{T_3}{T_2} &= \frac{T_{01} - \frac{u_3^2}{2c_p}}{T_{01} - \frac{u_2^2}{2c_p}} \\
\frac{A_3}{A_2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{T_{01} - \frac{\gamma-1}{2\gamma R}u_3^2}{T_{01} - \frac{\gamma-1}{\gamma R}2u_3^2}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}
\end{aligned}$$

d) Da im Querschnitt 1 ein Verdichtungsstoß aufzufinden ist, muss die Anströmmachzahl $M_\infty > 1$ sein.

e) Zeichnungen:





6. Aufgabe (14 Punkte)

a) $\mathrm{Re_L} = \frac{\rho u L}{\eta}$
Das Erreichen von sehr hohen Reynoldszahlen bei kleinen Abmessungen. Realitätsgetreue Mach- und Reynoldszahl (bei akzeptabler Eulerzahl).
Gasdichte nimmt mit sinkender Temperatur zu, Viskosität nimmt ab. Dichte im Zähler, Viskosität im Nenner, daher steigt $\mathrm{Re_L}$.

b) Der Körper erfährt keinen Strömungswiderstand. Die inkompressible Strömung ist in der Potentialtheorie drehungsfrei und reibungsfrei und die Kontur entspricht einer Stromlinie, weshalb keine Widerstandskraft auftreten kann.

c) Druckbeiwert: $c_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2}$

$c_{p0} = 1$ im Staupunkt.

d) Es müssen genau so viele Gleichungen wie unbekannte bestehen. Ansonsten ist das System überbestimmt und die Koeffizienten können nicht eindeutig berechnet werden. Manche Geschwindigkeitsverläufe widersprechen sich mit den Randbedingungen. Z.B. kann $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\frac{y}{\delta}=1} = 0$ bei linearen GS-Verläufen nicht erfüllt werden.

e)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

Inkompressibilitätsbedingung mit $\varepsilon = 0,02$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \ \geq \ 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \ \geq \ 1 - \varepsilon$$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \ \leq \ (1 - \varepsilon)^{-(\gamma-1)}$$

$$M_{\text{inkomp}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left[(1 - \varepsilon)^{-(\gamma-1)} - 1\right]}$$

Näherung für $\varepsilon \ll 1$:
Mit $(1 - \varepsilon)^{-(\gamma-1)} \approx 1 + (\gamma - 1)\,\varepsilon$ (AS):

$$M_{\text{inkomp}} \approx \sqrt{2\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad M_{inkomp} = \sqrt{2 \cdot 0,02} = \sqrt{0,04} = 0,2$$