

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr. sc. D. Krug

Klausur

Aerodynamik II

18. 08. 2025

M U S T E R L Ö S U N G E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie und Überschallströmung, Traglinientheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall \quad |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Zum besseren Verständnis der Umströmung des Fahrwerks eines Passagierflugzeuges haben Sie Windkanalmessungen durchgeführt. Der Messschrieb eines Drucksensors auf dem Fahrwerksbein zeigt den in Abbildung 1.1 dargestellten Verlauf.

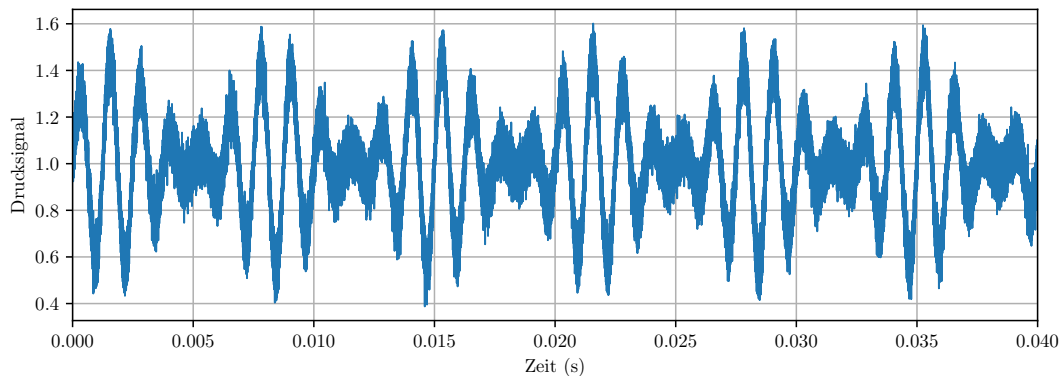


Abbildung 1.1: Messschrieb eines Drucksensors auf dem Fahrwerksbein.

- (a) Sie wollen die Ursache dieses Verlaufs besser verstehen und ergänzen daher Ihre Experimente durch numerische Untersuchungen. Begründen Sie kurz, welche der folgenden Verfahren dafür geeignet sind:
- RANS
 - LES
 - DNS
 - Panelverfahren
- (b) Getrieben von Ihrem Forschungsdrang wollen Sie Ihren eigenen Code zur Simulation des Problems entwickeln. Sie beginnen mit der Diskretisierung des Druckgradienten $\partial p / \partial x$ auf einem äquidistanten kartesischen Gitter. Verwenden Sie eine Taylor-Reihenentwicklung, um einen Ausdruck für den Druckgradienten herzuleiten, der eine Genauigkeit der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ erreicht.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^m} (x - x_0)^m$$

- (c) Die Oberfläche des Fahrwerks soll als reibungsbehaftete, adiabate Wand modelliert werden. Wie lautet die erforderliche Randbedingung für die primitiven Variablen (u, v, w, p) unter Annahme einer inkompressiblen Strömung?
- (d) Wie lautet die Prandtl-Glauert-Regel und welche Voraussetzungen müssen für ihre Gültigkeit erfüllt sein?
- (e) Können Sie Ihre inkompressiblen Simulationsergebnisse mithilfe der Prandtl-Glauert-Regel um den Einfluss der Kompressibilität korrigieren?
2. Sie interessieren sich nun für die Grenzschicht auf der Unterseite des Rumpfes. Dazu approximieren Sie die Unterseite des Rumpfes als ebene Platte. Die Fluggeschwindigkeit beträgt $u = 80 \text{ m/s}$. Die kinematische Viskosität der Luft beträgt $\nu = 1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Das Fahrwerk ist 5 m stromab der Nase positioniert. Schätzen Sie anhand dieser Werte ab, ob die Grenzschicht laminar oder turbulent ist, wenn diese auf das Fahrwerk trifft.

2. Aufgabe: Skelett-Theorie und Überschallströmung (18 Punkte)

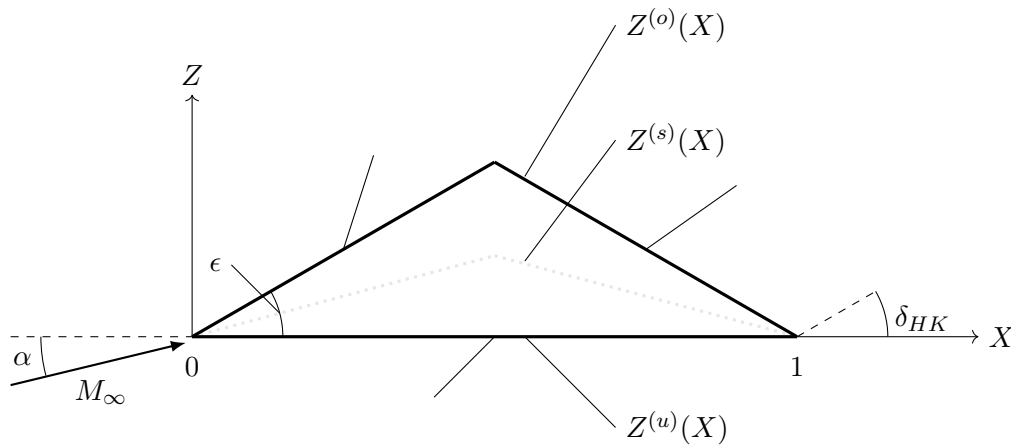


Abbildung 2.1: Keil mit Öffnungswinkel ϵ und flacher Unterseite.

Der in Abbildung 2.1 dargestellte Keil soll zunächst für den inkompressiblen Fall unter Vernachlässigung seiner Dicke mit der Skelett-Theorie untersucht werden.

1. Leiten Sie die allgemeine Formel zur Berechnung des Auftriebsbeiwertes $C_l = \pi(2A_0 + A_1)$ her.
2. Berechnen Sie den Auftriebsbeiwert $C_l(\epsilon, \alpha)$ der Sehne $Z^{(s)}$ des Keilprofils in Abhängigkeit des Öffnungswinkels ϵ und des Anstellwinkels α .
3. Der Momentenbeiwert um die Profelnase kann mithilfe der Formel $C_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2)$ berechnet werden. Bestimmen Sie den Momentenbeiwert $C_m(\epsilon, \alpha)$ der Sehne des gegebenen Keilprofils in Abhängigkeit des Anstellwinkels α und des Öffnungswinkels ϵ . Zeigen Sie, dass der Neutralpunkt des Keils bei $X = \frac{1}{4}$ liegt.

Im Folgenden soll der Keil bei einer Anströmung von $Ma_\infty = 2.0$ unter dem Anstellwinkel von $\alpha = 10^\circ$ untersucht werden. Es gilt $\epsilon = 25^\circ$. Die Abströmung an der Hinterkante des Keils bildet einen Winkel von $\delta_{HK} = 5^\circ$ mit der Sehne.

4. Übertragen Sie die Skizze in Ihre Aufgabenblätter und skizzieren Sie sorgfältig das Strömungsfeld um den Keil unter Berücksichtigung möglicher Diskontinuitäten, Expansionsfächer oder Mach'schen Linien.
5. Stellen Sie die Zustandsänderungen an der Oberseite des Profils inklusive des Nachlaufs qualitativ in der Hodographenebene dar.
6. Berechnen Sie die Druckverhältnisse p_1/p_∞ , p_2/p_∞ , und p_3/p_∞ auf der Ober- bzw. Unterseite des Keils mithilfe der allgemeinen gasdynamischen Zusammenhänge. Verwenden Sie hierfür die gegebenen Abbildungen 2.2-2.6.
7. Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert C_l anhand der gasdynamischen Zusammenhänge.

Gegeben: Anstellwinkel α , Öffnungswinkel ϵ , $\kappa = 1.4$

Hinweise:

- Kinematische Randbedingung an der Skelettlinie:

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi)$$

- Birnbaum-Ackermann'scher Ansatz für die Zirkulationsverteilung:

$$\gamma = 2u_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)$$

- Druckbeiwert in der linearisierten Potentialtheorie: $c_p = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$.
- Wertetabelle zur Abschätzung der Sinusfunktion:

α	$15^\circ \pm 2^\circ$	$20^\circ \pm 2^\circ$	$25^\circ \pm 2^\circ$	$30^\circ \pm 2^\circ$	$35^\circ \pm 2^\circ$
$\sin \alpha \approx$	0.25	0.3	0.4	0.5	0.55

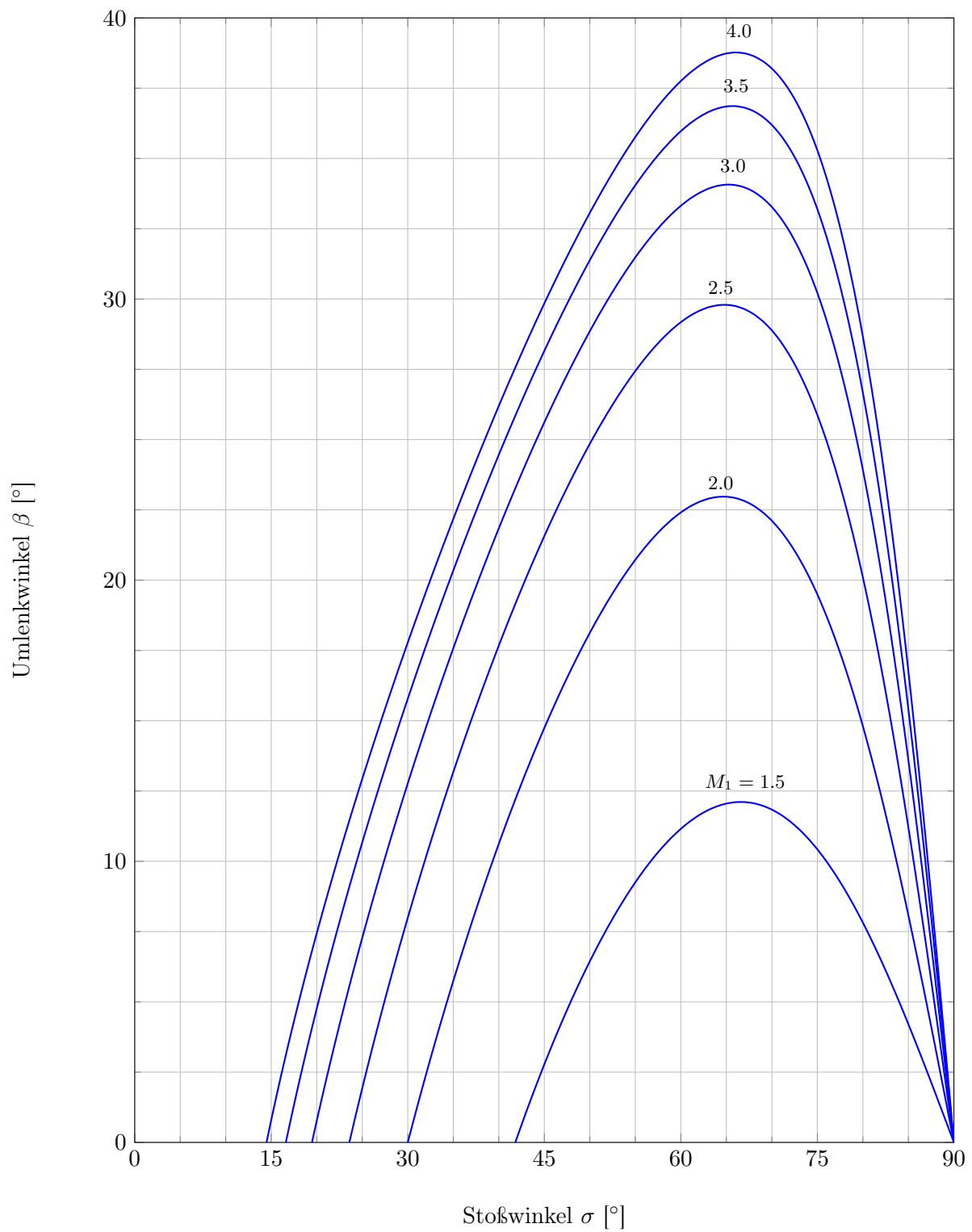


Abbildung 2.2: Umlenkwinkel über schrägen Verdichtungsstoß als Funktion der Machzahl vor dem Stoß und des Stoßwinkels.

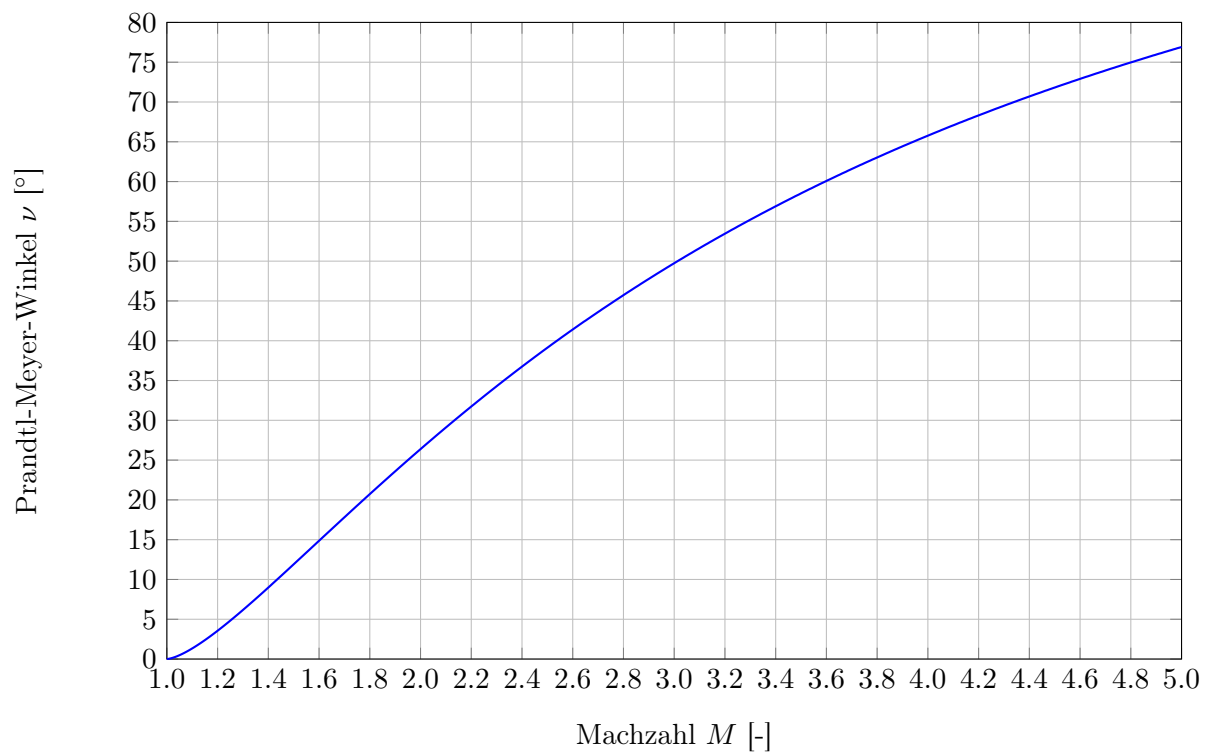


Abbildung 2.3: Prandtl-Meyer-Winkel als Funktion der Machzahl.

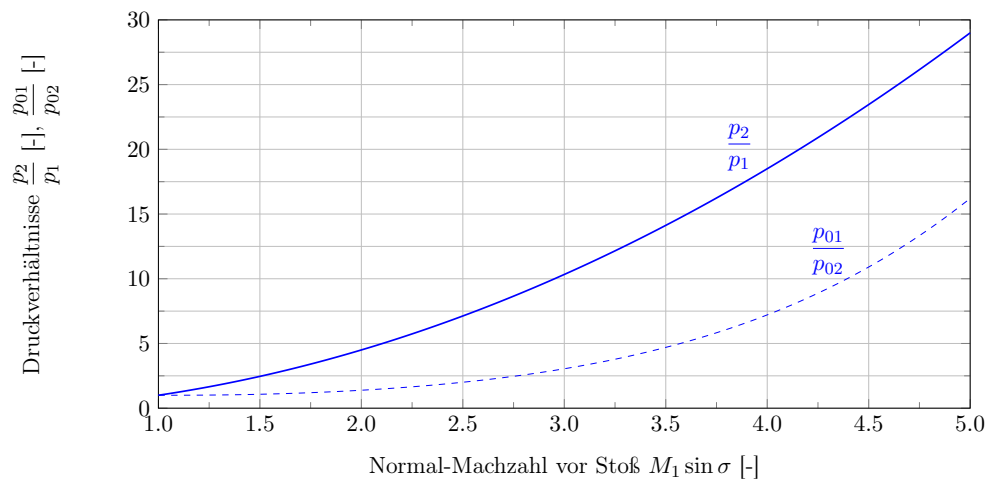


Abbildung 2.4: Rankine-Hugoniot-Beziehungen für statisches und Ruhedruckverhältnis über schräge Verdichtungsstöße.

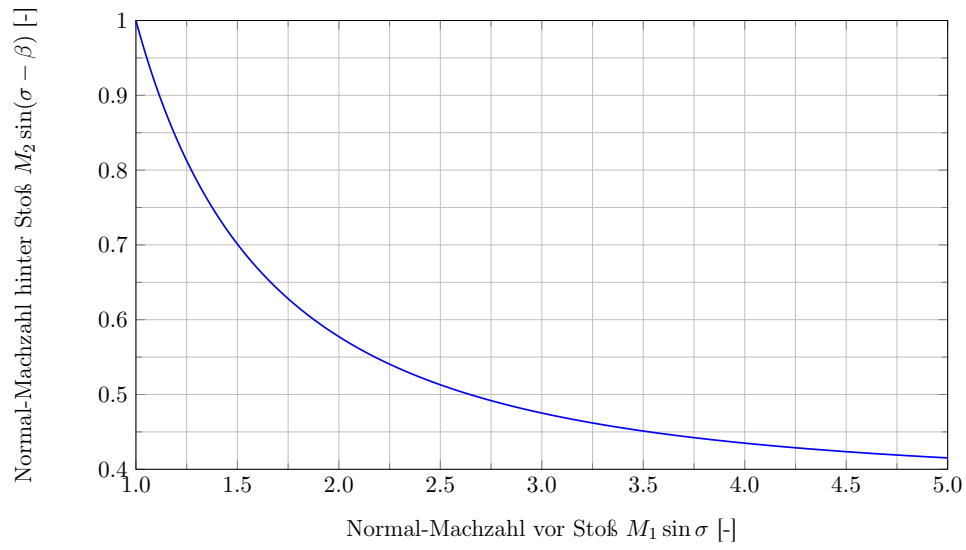


Abbildung 2.5: Verhältnis der Normal-Machzahlen über schrägen Verdichtungsstoß.

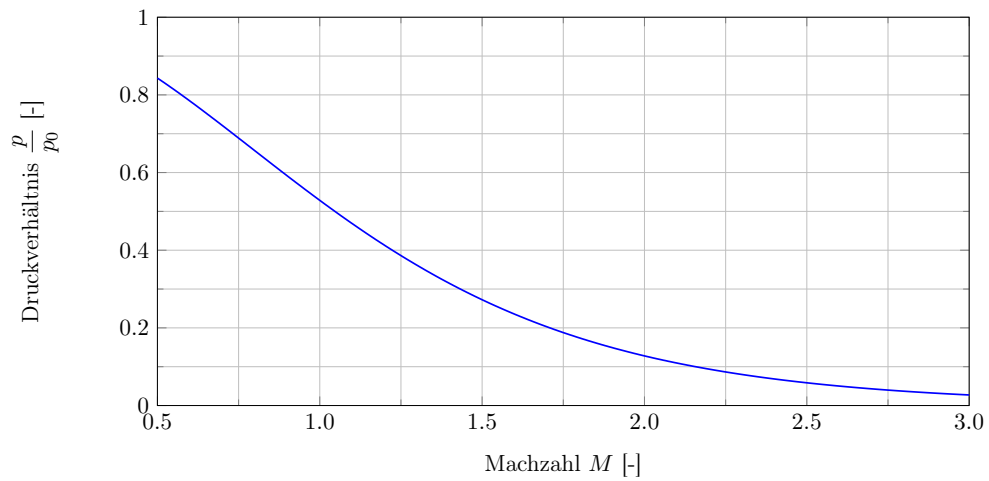


Abbildung 2.6: Isentropenbeziehung für Druck.

3. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)

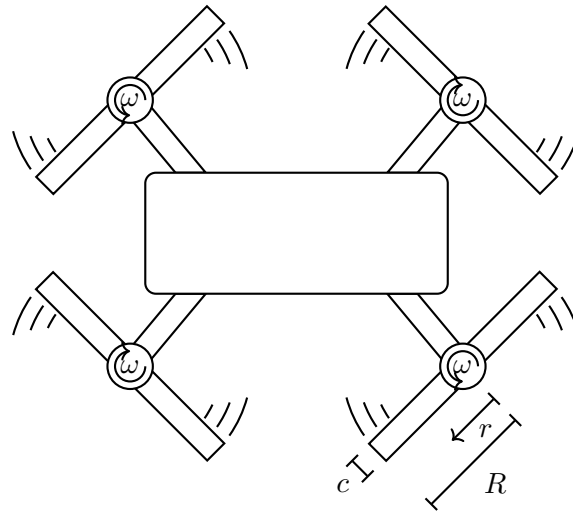


Abbildung 3.1: Quadcopter im Schwebeflug.

Die Rotoren des in Abbildung 3.1 gezeigten Quadcopters sollen für den stationären Schwebeflug ausgelegt werden. Nehmen Sie an, dass sich die Rotoren nicht gegenseitig beeinflussen und dass kein Wind weht.

1. Skizzieren Sie allgemein die Anströmverhältnisse an einem symmetrischen Querschnittsprofil eines Rotorblattes und tragen Sie alle relevanten Kraftkomponenten ein.
2. Es soll nun der geometrische Anstellwinkel $\alpha_g(\varphi)$ der Rotorblätter so bestimmt werden, dass die folgende Zirkulationsverteilung entlang eines Rotors vorliegt:

$$\Gamma(r) = C_\Gamma R V_\infty(r) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad r \in [-R, R], \quad C_\Gamma = \text{konst.}, \quad V_\infty \geq 0$$

Hinweis: Der Einfluss der Rotornabe kann vernachlässigt werden. Gehen Sie folgendermaßen vor:

- (a) Bestimmen Sie den effektiven Anstellwinkel $\alpha_e(\varphi)$ unter der Annahme, dass der Rotor über ein symmetrisches, schlankes Profil mit konstanter Sehnenlänge c verfügt.
 - (b) Bestimmen Sie den induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(\varphi)$.
 - (c) Bestimmen Sie den geometrischen Anstellwinkel $\alpha_g(\varphi)$
3. Bestimmen Sie die notwendige Winkelgeschwindigkeit ω für den stationären Schwebeflug.

Gegeben: C_Γ , R , c , m , g , ρ_∞

Hinweise:

- Der Einfluss von Beschleunigungskräften kann vernachlässigt werden.
- Transformation

$$r = -R \cos \varphi$$

- Induzierte Geschwindigkeit

$$w_i(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \frac{d\Gamma}{dr'} \frac{dr'}{r - r'}$$

- Trigonometrische Beziehung:

$$\sin^2(n\varphi) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2n\varphi))$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. (a) Der Druckverlauf weist eine vielfältige Dynamik in unterschiedlichen Frequenzbereichen auf. Hier scheint also ein komplexes dynamisches Strömungsphänomen vorzuliegen. RANS und Panelverfahren sind nicht in der Lage hinreichend zeitaufgelöste Ergebnisse zu produzieren. Sie sind hier also für die detailliertere Untersuchung der strömungsphysikalischen Phänomene ungeeignet. LES und DNS liefern räumlich und zeitlich hochaufgelöste Daten mit sehr niedrigem Modellierungsgrad. Daher sind Sie für die tiefergehende Untersuchung der Phänomenologie gut geeignet.
- (b) Gesucht ist ein Differenzenausdruck zur Approximation des Druckgradienten mit einer Genauigkeit der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2)$. Dazu stellen wir ausgehend von der Zelle mit dem Index i die Taylorreihen für die Nachbarzellen mit den Indizes $i - 1$ und $i + 1$ auf:

$$p_{i+1} = p_i + \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5)$$

$$p_{i-1} = p_i - \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \right|_i \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5)$$

Subtrahieren der beiden Gleichungen liefert:

$$p_{i+1} - p_{i-1} = 2 \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \Delta x + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right|_i \Delta x^3 + \mathcal{O}(\Delta x^5)$$

Umstellen nach $\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i$ ergibt:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right|_i \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

- (c) Für eine reibungsbehaftete Wand gilt die Haftbedingung, sodass für alle Geschwindigkeitskomponenten $u = v = w = 0$ vorgeschrieben wird.
Für eine adiabate Wand muss $q_w = 0$ sein. Gemäß des Fourier'schen Gesetzes darf entsprechend kein Temperaturgradient normal zur Wand vorliegen: $\partial T / \partial n = 0$. Aus dem idealen Gasgesetz $p = \rho R T$ und der Annahme der Inkompressibilität ($\rho = \text{konst}$) folgt damit direkt $\partial p / \partial n = 0$.
- (d) Die Prandtl-Glauert-Regel lautet:

$$c_p = \frac{c_{p, \text{inkompressibel}}}{\sqrt{|1 - M_\infty^2|}}$$

Die Voraussetzungen sind:

- subsonisch: $M_\infty < 0.8$ oder supersonisch $M_\infty > 1.2 \wedge M_\infty < 5.0$
- reibungs- und drehungsfreie Strömung
- schlanke Körper, geringe Anstellwinkel

- (e) In der Simulation wird eine reibungsbehaftete, adiabate Wand für die Modellierung des Fahrwerks verwendet. Dies steht im Widerspruch zur Anforderung an eine reibungsfreie Strömung. Weiterhin handelt es sich bei einem Fahrwerk in der Regel nicht um einen schlanken Körper, sondern eine komplexe dreidimensionale Struktur. Somit ist auch diese Anforderung (oder allgemein die Anforderung kleiner Störungen) verletzt.

2. Abschätzen der Reynoldszahl:

$$Re_x = \frac{ux}{\nu} = \frac{5 \text{ m} \cdot 8 \times 10^1 \text{ m/s}}{\frac{8}{5} \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 25 \times 10^6$$

Die Reynoldszahl am Ort des Fahrwerks liegt in der Größenordnung $\mathcal{O}(10^7)$ und ist damit deutlich größer als die kritische Reynoldszahl von 500 000. Es ist somit davon auszugehen, dass es sich um eine ausgebildete vollturbulente Grenzschicht handelt.

Lösung 2. Aufgabe: Skelett-Theorie und Überschallströmung (18 Punkte)

1. Bestimmung des Auftriebsbeiwertes:

$$c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}$$

Mit dem Satz von Kutta-Zhukovski:

$$\begin{aligned}\hat{L} &= \rho u_\infty \Gamma \\ &= \rho u_\infty \int_0^1 \gamma(X) dX\end{aligned}$$

Eingesetzt in den Ansatz folgt:

$$c_l = \int_0^1 2 \frac{\gamma(X)}{u_\infty} dX$$

Mit der Transformation:

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) \\ \frac{dX}{d\varphi} &= -\frac{1}{2} \sin \varphi \\ \Rightarrow c_l &= \int_\pi^0 2 \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} \left(-\frac{1}{2} \sin \varphi\right) d\varphi\end{aligned}$$

Einsetzen der Birnbaum-Ackermann'schen Zirkulationsverteilung:

$$\begin{aligned}c_l &= \int_0^\pi 4 \left(A_0 \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin n\varphi \right) \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi 2 \left(A_0 \tan \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \sum_{n=1}^N A_n \sin \varphi \sin n\varphi \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi 2 \left(A_0 (1 - \cos \varphi) + \sum_{n=1}^N A_n \sin \varphi \sin n\varphi \right) d\varphi\end{aligned}$$

Das Integral über die Reihe $\sum_{n=1}^N \sin \varphi \sin n\varphi$ ist gleich null für alle $n \neq 1$:

$$\begin{aligned}c_l &= 2 \cdot \left[(\varphi - \sin \varphi) A_0 + \frac{\varphi}{2} A_1 \right]_0^\pi \\ &= 2 \cdot \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right) = 2\pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right)\end{aligned}$$

2. Der Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten der Birnbaum-Ackermann'schen Zirkulationsverteilung erfolgt über die kinematische Randbedingung der Skelett-Theorie:

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi)$$

Aufgrund der Unstetigkeit in der Ableitung der Skelettlinie bei $X = 0.5$ muss die Methode der universellen Multiplikation angewendet werden. Ein einfacher Koeffizientenvergleich ist nicht möglich! Dazu

wird die Gleichung mit $\cos(p\varphi)$ mit unterschiedlichen p -Termen multipliziert und über den Keil in den Grenzen $\varphi \in [0, \pi]$ integriert:

$$\int_0^\pi \alpha \cdot \cos(p\varphi) d\varphi - \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} \cdot \cos(p\varphi) d\varphi = \int_0^\pi (A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)) \cdot \cos(p\varphi) d\varphi$$

Anhand der gegebenen Integrale in der Formelsammlung lässt sich die Gleichung für

$$\begin{aligned} p = 0 & : \Rightarrow A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} d\varphi \\ p = 1 & : \Rightarrow A_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} \cos\varphi d\varphi \end{aligned}$$

vereinfachen.

Entsprechend der Substitution $X = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$ müssen die Integrale in zwei Bereiche mit den folgenden Stützstellen aufgeteilt werden:

$$\begin{aligned} X = 0 & \hat{=} \cos\varphi = -1 \hat{=} \varphi = \pi \\ X = \frac{1}{2} & \hat{=} \cos\varphi = 0 \hat{=} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ X = 1 & \hat{=} \cos\varphi = 1 \hat{=} \varphi = 0 \end{aligned}$$

Die Steigung der Skelettlinie in den jeweiligen Bereichen ist:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dX}|_I &= \tan(\epsilon/2) \approx \epsilon/2 \\ \frac{dZ}{dX}|_{III} &= -\tan(\epsilon/2) \approx -\epsilon/2 \end{aligned}$$

Für den Koeffizienten A_0 ergibt sich somit:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} d\varphi = \alpha - \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi \left(\frac{\epsilon}{2}\right) d\varphi \right) = \alpha - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\epsilon}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2} \pi - \frac{\epsilon}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \alpha$$

Für den Koeffizienten A_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} \cos\varphi d\varphi = -\frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \cos\varphi d\varphi + \int_{\pi/2}^\pi \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cos\varphi d\varphi \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \left(\left[\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \sin\varphi \right]_0^{\pi/2} + \left[\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \sin\varphi \right]_{\pi/2}^\pi \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \left(-\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right) = \frac{2\epsilon}{\pi} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Auftriebsbeiwert zu:

$$c_l = 2\pi\alpha + 2\epsilon$$

3. Das untersuchte Profilskelett weist eine symmetrische Wölbung ($X_f = 0.5$) auf und besitzt somit keinen S-Schlag, weswegen $A_2 = 0$ gilt. Alternativ kann das Integral für $p = 2$ gelöst werden. Für den Momentenbeiwert ergibt sich:

$$c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + 0) = -\frac{\pi}{2}\left(\alpha + \frac{2\epsilon}{\pi}\right)$$

Aus der Momentenbilanz um die Profilnase und der Definition des Neutralpunktes ($\partial c_m / \partial c_l = 0$) folgt:

$$\begin{aligned} c_m &= c_{m0} - c_l \cdot X_N \Rightarrow \text{(abgeleitet nach } c_l) \\ X_N &= -\frac{\partial c_m}{\partial c_l} = -\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial c_l} = -\frac{-\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

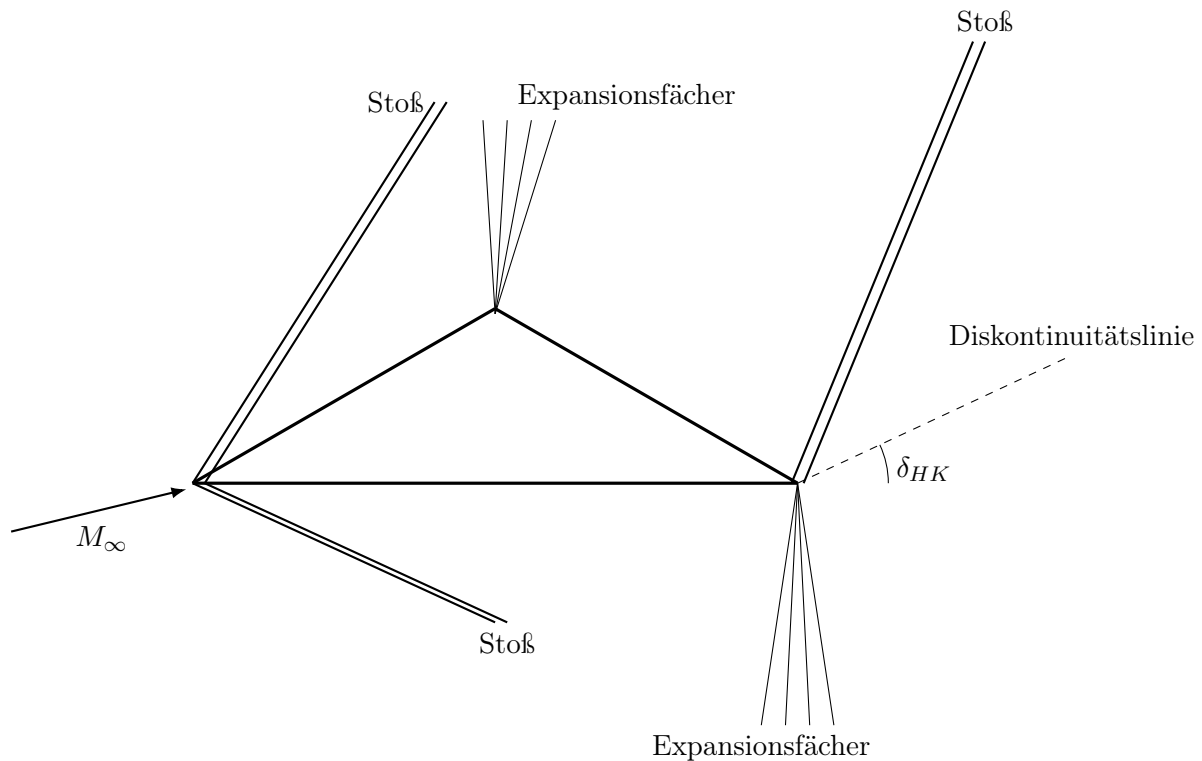


Abbildung 2.1: Strömungsfeld um den Keil.

4. Abbildung 2.1 zeigt die Strömung um den Keil.

- Oberseite: Stoß an Vorder- und Hinterkante und Expansionsfächer bei $X = 0.5$.
- Unterseite: Stoß an Vorderkante und Expansionsfächer an der Hinterkante.
- Diskontinuitätslinie an Hinterkante, da in der Strömung auf der Ober- und Unterseite unterschiedlich starke Stöße auftreten und somit die Entropiezunahme unterschiedlich ist.

5. Abbildung 2.2 zeigt die Zustandsänderungen auf der Oberseite in der Hodographenebene.

6. Zunächst wird das Druckverhältnis auf der Profilerseite bestimmt:

- Zustand der freien Anströmung

Druckverhältnis des statischen- und Ruhedrucks bei $M_\infty = 2.0$ aus der Isentropenbeziehung (Abbildung 2.6): $\frac{p_\infty}{p_{0\infty}} \approx 0.125$

- Zustandsänderung $\infty \rightarrow 1$: Verdichtungsstoß

Umlenkwinkel: $\beta_{\infty \rightarrow 1} = \epsilon - \alpha = 15^\circ$

Machzahl vor Stoß: $M_\infty = 2.0$ (Aufgabenstellung)

Stoßwinkel aus Diagramm 2.2: $\sigma_{\infty \rightarrow 1} \approx 45^\circ$

Druckverhältnis aus Diagramm 2.4 mit $M_\infty \sin \sigma_{\infty \rightarrow 1} = \sqrt{2} \approx 1.4$: $\frac{p_1}{p_\infty} \approx 2.0$

Machzahl hinter Stoß aus Diagramm 2.5 mit $M_\infty \sin \sigma_{\infty \rightarrow 1} = 1.4$: $M_1 \sin(\sigma_{\infty \rightarrow 1} - \beta_{\infty \rightarrow 1}) \approx 0.74$
 Aus der Tabelle in den Hinweisen folgt $\sin(\sigma_{\infty \rightarrow 1} - \beta_{\infty \rightarrow 1}) = \sin(30^\circ) \approx 0.50$ Daraus folgt:
 $M_1 \approx 1.48$

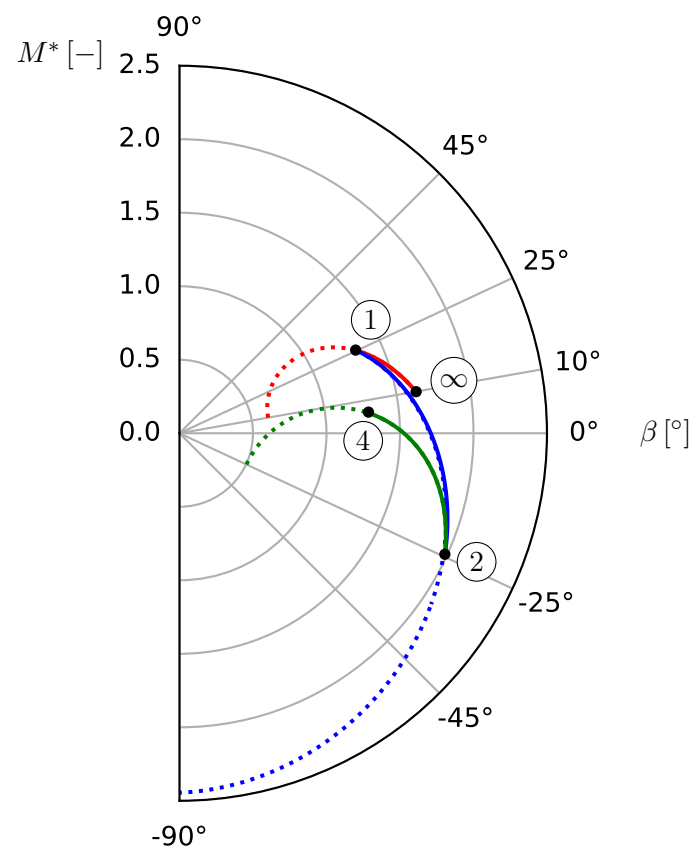


Abbildung 2.2: Zustandsänderungen auf der Oberseite in Hodographenebene.

Totaldruckverlust über Verdichtungsstoß aus Abbildung 2.4 mit $M_1 \sin \sigma_{\infty \rightarrow 1} = 0.74$: $\frac{p_{0\infty}}{p_{01}} \approx 1.0$

- Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$: Isentrope Expansion

Prandtl-Meyer-Winkel vor der Kante aus Diagramm 2.3 mit $M_1 = 1.48$: $\nu_1 \approx 13^\circ$

Umlenkwinkel: $\beta_{1 \rightarrow 2} = 2\epsilon = -50.0^\circ$

Prandtl-Meyer-Winkel an Hinterkante: $\nu_2 = \nu_1 - \beta_{1 \rightarrow 2} \approx 63.0^\circ$

Machzahl an Hinterkante aus Diagramm 2.5 mit $\nu_2 \approx 63.0^\circ$: $M_2 \approx 3.7$

Druckverhältnis von statischem und Ruhedruck aus Isentropenbeziehung (Abbildung 2.6) mit $M_2 = 3.7$: $\frac{p_2}{p_{02}} = 0.010$

Isentrope Zustandsänderung: $p_{02} = p_{01}$.

Druckverhältnis gegenüber freier Anströmung: $\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{p_2}{p_{02}} \frac{p_{01}}{p_{0\infty}} \frac{p_{0\infty}}{p_\infty} \approx 0.010 * 1.0/0.125 = 0.08$

Im folgenden wird das Druckverhältnis auf der Unterseite des Profils bestimmt:

- Zustandsänderung $\infty \rightarrow 3$: Verdichtungsstoß

Umlenkwinkel: $\beta_{\infty \rightarrow 3} = \alpha = 10^\circ$

Machzahl vor Stoß: $M_\infty = 2.0$ (Aufgabenstellung)

Stoßwinkel aus Diagramm 2.2: $\sigma_{\infty \rightarrow 3} \approx 38^\circ$

Druckverhältnis aus Diagramm 2.4 mit $M_\infty \sin \sigma_{\infty \rightarrow 3} \approx 1.23$: $\frac{p_3}{p_\infty} \approx 1.2$

- Bestimmung des Auftriebsbeiwertes anhand der gasdynamischen Zusammenhänge: Anhand der allgemeinen Definition von c_l folgt

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{L}{\rho_\infty/2 v_\infty^2 l} = \frac{L}{\rho_\infty/2 (M_\infty \sqrt{\gamma R T_\infty})^2 l}, \quad \text{mit } v_\infty = M_\infty \sqrt{\gamma R T_1} \\ &= \frac{2L}{\rho_\infty M_\infty^2 \gamma \underbrace{R T_\infty}_{p_\infty/\rho_\infty} l} = \frac{2L}{\gamma M_\infty^2 p_\infty l} \end{aligned}$$

Wobei sich die Auftriebskraft aus den beiden Komponenten der resultierenden Druckkraft ergibt

$$L = R_\perp \cos(\alpha) - R_\parallel \sin(\alpha)$$

Die Kraftkomponenten setzen sich aus den lokalen Druckdifferenzen und den entsprechenden Stirnflächen zusammen:

$$\begin{aligned} R_\perp &= \sum p_i \frac{l}{2} = (p_3 - p_1 + p_3 - p_2) \frac{l}{2} \\ R_\parallel &= \sum p_i \frac{l}{2} \tan(\epsilon) = (p_1 - p_2) \frac{l}{2} \tan(\epsilon) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \frac{l}{2}(p_3 - p_1 + p_3 - p_2) \cos(\alpha) - \frac{l}{2}(p_1 - p_2) \underbrace{\tan(\epsilon) \sin(\alpha)}_{\text{Von höherer Ordnung klein, daher vernachlässigbar!}}$$

$$c_l = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left(2 \frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_1}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right)$$

Nach Einsetzen der Terme aus der vorherigen Aufgabe ergibt sich:

$$c_l = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} (2 * 1.2 - 2.0 - 0.08) \approx 0.32.$$

Lösung 3. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)

1.

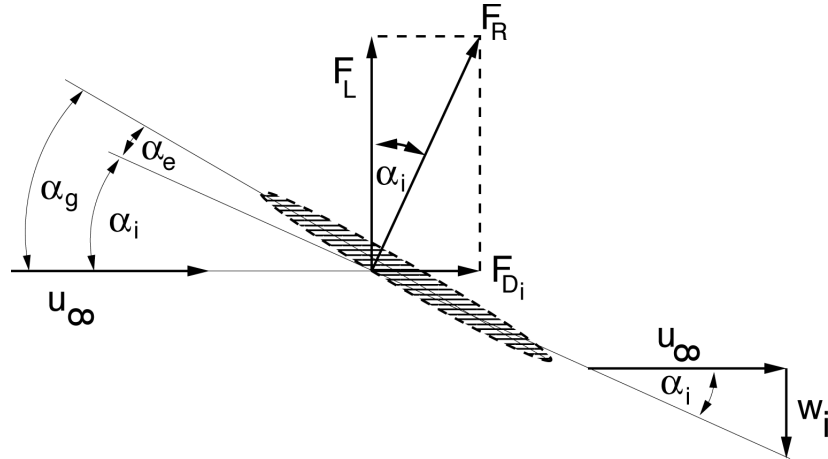


Abbildung 3.1: Geschwindigkeiten, Kräfte und Winkel am Profilquerschnitt.

2. (a) Der effektive Anstellwinkel eines symmetrischen Profils ($\alpha_{L=0} = 0$) ermittelt sich aus der Beziehung $C_l(\varphi) = 2\pi\alpha_e(\varphi)$ und dem Kutta-Zhukovski Theorem für den lokalen Auftrieb

$$\hat{L}(\varphi) = C_l \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2(r) c = \rho_\infty V_\infty(r) \Gamma(r)$$

daraus folgt:

$$\alpha_e(r) = \frac{\Gamma(r)}{\pi V_\infty(r) c}.$$

Einsetzen der gegebenen Zirkulationsverteilung und Transformation liefert:

$$\alpha_e(r) = \frac{C_\Gamma R V_\infty(r) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}}{\pi V_\infty(r) c} = \frac{C_\Gamma R}{\pi c} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{C_\Gamma R}{\pi c} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{C_\Gamma R}{\pi c} \sin \varphi$$

- (b) Für den induzierten Anstellwinkel gilt für kleine Winkel $\alpha_i = -w_i(r)/V_\infty(r)$ und mit dem Hinweis

$$\alpha_i(r) = \frac{1}{4\pi V_\infty(r)} \int_{-R}^R \frac{(d\Gamma/dr') dr'}{r - r'},$$

und mit der Koordinatentransformation aus dem Hinweis folgt dann daraus

$$\alpha_i(\varphi) = -\frac{1}{4\pi V_\infty(\varphi)} \int_0^\pi \frac{(d\Gamma/d\varphi') d\varphi'}{R(\cos \varphi - \cos \varphi')}.$$

Die Zirkulationsverteilung ist laut Aufgabenstellung:

$$\Gamma(r) = C_\Gamma R V_\infty(r) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

Für die Anströmgeschwindigkeit gilt:

$$\begin{aligned} V_\infty(r) &= \omega \|r\| \\ &= \begin{cases} \omega R \cos(\varphi) & \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\omega R \cos(\varphi) & \forall \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\Gamma(r) = C_\Gamma R \omega \|r\| \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

Mit der Transformation $r = -R \cos \varphi$ folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= C_\Gamma R^2 \omega \|\cos \varphi\| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \\ &= C_\Gamma R^2 \omega \|\cos \varphi\| \sin \varphi \\ &= \begin{cases} \frac{C_\Gamma}{2} R^2 \omega \sin(2\varphi) & \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{C_\Gamma}{2} R^2 \omega \sin(2\varphi) & \forall \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Ableiten liefert:

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi} = \begin{cases} -C_\Gamma R^2 \omega \cos 2\varphi & \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ C_\Gamma R^2 \omega \cos 2\varphi & \forall \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Einsetzen in den Ausdruck für $\alpha_i(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \alpha_i(\varphi) &= -\frac{1}{4\pi V_\infty(\varphi)} \int_0^\pi \frac{(d\Gamma/d\varphi') d\varphi'}{R(\cos \varphi - \cos \varphi')} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{(d\Gamma/d\varphi') d\varphi'}{V_\infty(\varphi) R(\cos \varphi - \cos \varphi')} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{C_\Gamma R^2 \omega \cos 2\varphi' d\varphi'}{\omega \cos(\varphi) R^2 (\cos \varphi - \cos \varphi')} - \frac{1}{4\pi} \int_{\pi/2}^\pi \frac{-C_\Gamma R^2 \omega \cos 2\varphi' d\varphi'}{-\omega \cos(\varphi) R^2 (\cos \varphi - \cos \varphi')} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{C_\Gamma \cos 2\varphi' d\varphi'}{\cos(\varphi) (\cos \varphi - \cos \varphi')} \\ &= -\frac{C_\Gamma}{4\pi \cos(\varphi)} \int_0^\pi \frac{\cos 2\varphi' d\varphi'}{(\cos \varphi - \cos \varphi')} \end{aligned}$$

Lösen des Glauert-Integrals liefert:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{C_\Gamma}{4\pi \cos(\varphi)} \frac{-\pi \sin 2\varphi}{\sin \varphi} \\ &= \frac{C_\Gamma}{4\pi \cos(\varphi)} 2\pi \cos \varphi \\ &= \frac{C_\Gamma}{2} \end{aligned}$$

- (c) Der lokale geometrische Anstellwinkel (fundamentale Gleichung der Prandtl'schen Traglinientheorie) für einen Tragflügel bestehend aus symmetrischen Profilschnitten setzt sich zusammen aus

$$\alpha_g(r) = \alpha_e(r) + \alpha_i(r).$$

Insgesamt folgt für den geometrischen Anstellwinkel:

$$\alpha_g = \frac{2R}{\pi c} \sin \varphi + \frac{C_\Gamma}{2}$$

3. Damit sich der Quadrocopter im stationären Schwebeflug befindet, muss ein Kräftegleichgewicht zwischen den Auftriebskräften der Rotoren und der Gewichtskraft des Quadrocopters herrschen. Der Quadrocopter verfügt in Summe über 4 Rotoren, deren Auftrieb mithilfe der Traglinientheorie berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} mg &= L_{\text{gesamt}} \\ mg &= 4L_{\text{Rotor}} \\ mg &= 4\rho_\infty \int_{-R}^R V_\infty(r) \Gamma(r) dr \end{aligned}$$

Einsetzen der gegebenen Zirkulationsverteilung liefert:

$$\begin{aligned}
 mg &= 4\rho_\infty \int_{-R}^R V_\infty(\varphi) C_\Gamma R V_\infty(r) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} dr \\
 mg &= 4\rho_\infty \int_{-R}^R C_\Gamma R V_\infty^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} dr \\
 mg &= 4\rho_\infty \omega^2 R C_\Gamma \int_{-R}^R r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} dr
 \end{aligned}$$

Transformation des Integrals mithilfe der Transformationsregel:

$$\begin{aligned}
 r &= -R \cos \varphi \\
 dr &= R \sin \varphi d\varphi
 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 mg &= 4\rho_\infty \omega^2 R C_\Gamma \int_0^\pi R^2 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} R \sin \varphi d\varphi \\
 mg &= 4\rho_\infty \omega^2 R^4 C_\Gamma \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \\
 mg &= 4\rho_\infty \omega^2 R^4 C_\Gamma \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi \\
 mg &= 4\rho_\infty \omega^2 R^4 C_\Gamma \int_0^\pi \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \\
 mg &= \frac{1}{2} \rho_\infty \omega^2 R^4 C_\Gamma \int_0^\pi (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \\
 mg &= \frac{1}{2} \rho_\infty \omega^2 R^4 C_\Gamma \left[\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right]_0^\pi \\
 mg &= \frac{\pi}{2} \rho_\infty \omega^2 R^4 C_\Gamma
 \end{aligned}$$

Umstellen nach ω liefert die gesuchte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg}{\pi \rho_\infty R^4 C_\Gamma}}$$