

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

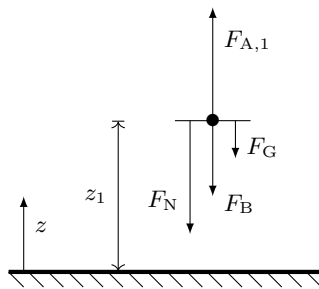
Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik I“

13. 03. 2025

1. Aufgabe

- a) Statische globale Impulsbilanz (Kräftegleichgewicht) in z -Richtung um den gesamten Ballon für den Zustand 1, wo sich der Ballon am höchsten Punkt mit der maximalen Nutzlast m_N befindet und bleibt:

$$\underbrace{\frac{dJ_z}{dt}}_{\text{da statisch}} = F_{A,1} - F_N - F_B - F_G$$



Da die Zustandsänderung von Dichte und Temperatur über die Ballonabmaße gegenüber der Steighöhe zu vernachlässigen sind, wird die Auftriebskraft des Ballons im Zustand 1 bei der Steighöhe z_1 nach dem Satz von Archimedes berechnet:

$$F_{A,1} = \rho_{L,1} V_1 g$$

Gewichtskräfte:

Nutzlast:	$F_N = m_N g$
Ballon:	$F_B = m_B g$
Gas:	$F_G = m_G g$

Somit ergibt sich:

$$0 = \rho_{L,1} V_1 g - m_N g - m_B g - m_G g \quad |\text{mit } g \neq 0$$
$$\Rightarrow m_N = \rho_{L,1} V_1 - m_B - m_G$$

- b) Die gegebene statische lokale Impulsbilanz für ein Fluid der Dichte ρ lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Für die polytrope Atmosphäre gilt die polytrope Zustandsgleichung $p\rho^{-n} = \text{const}$ mit Polytropenindex $n = \text{const}$. Hiermit können die Dichte $\rho = \rho(z)$ und der Druck $p = p(z)$

bei der beliebigen Höhe z mit den Zuständen am Boden bei der Höhe z_0 , das heißt Dichte ρ_0 und Druck p_0 wie folgt in Beziehung gesetzt werden.

$$p(z) = \rho^n(z) \frac{p_0}{\rho_0^n} > 0$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}} = \rho_0 \frac{p^{\frac{1}{n}}}{p_0^{\frac{1}{n}}} > 0$$

Einsetzen in die statische lokale Impulsbilanz liefert mit der Randbedingung $\rho(z_0) = \rho_0$ bzw. $p(z_0) = p_0$:

Hinweis: Bei der nachfolgenden Lösung ist $n = 1$ ausgeschlossen. In Kombination mit dem idealen Gas-Gesetz ergäbe sich sonst die barometrische Höhenformel für eine isotherme Ideal-Gas-Atmosphäre.

1. Weg

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\underbrace{\rho^n(z)}_{=\text{const}_z} \frac{p_0}{\rho_0^n} \right] = -\rho g \quad \left| \text{Kettenregel} \right.$$

$$\Rightarrow n \rho^{n-1} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{p_0}{\rho_0^n} = -\rho g \quad \left| \text{Trennung der Variablen} \right.$$

$$\Rightarrow n \rho^{n-2} \partial \rho = -g \frac{\rho_0^n}{p_0} \partial z \quad \left| \text{Integration von } z_0 \text{ nach } z \right.$$

$$\Rightarrow \int_{\rho(z=z_0)=\rho_0}^{\rho(z)=\rho} n \bar{\rho}^{n-2} \partial \bar{\rho} = \int_{z_0}^z -g \frac{\rho_0^n}{p_0} \partial \bar{z} \quad \left| \text{mit } g \frac{\rho_0^n}{p_0} = \text{const}_z \right.$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} n \bar{\rho}^{n-2} \partial \bar{\rho} = -g \frac{\rho_0^n}{p_0} \int_{z_0}^z \partial \bar{z} \quad \left| \text{Integration} \right.$$

$$\Rightarrow \left[\frac{n}{n-1} \bar{\rho}^{n-1} \right]_{\rho_0}^{\rho} = -g \frac{\rho_0^n}{p_0} (z - z_0) \quad \left| \text{Ränder einsetzen} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n-1} [\rho^{n-1} - \rho_0^{n-1}] = -g \frac{\rho_0^n}{p_0} (z - z_0) \quad \left| \text{Umstellen nach } \rho = \rho(z) \right.$$

$$\Rightarrow \rho^{n-1} = \rho_0^{n-1} - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_0^n}{p_0} (z - z_0) \quad \left| \text{Ausklammern von } \rho_0^{n-1} \right.$$

$$\Rightarrow \rho^{n-1} = \rho_0^{n-1} \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0) \right] \quad \left| \text{Potenzieren } \dots^{\frac{1}{n-1}}, \rho > 0 \right.$$

$$\Rightarrow \rho(z) = \rho_0 \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0) \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (1)$$

2. Weg

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho_0 \underbrace{\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{p_0^{\frac{1}{n}}}}_{=\rho} g && \left| \text{Trennung der Variablen} \right. \\
 \Rightarrow \frac{1}{p^{\frac{1}{n}}} \partial p &= -\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} \partial z && \left| \text{Integration von } z_0 \text{ nach } z \right. \\
 \Rightarrow \int_{p(z=z_0)=p_0}^{p(z)=p} \bar{p}^{-\frac{1}{n}} \partial \bar{p} &= \int_{z_0}^z -\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} \partial \bar{z} && \left| \text{mit } \frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} = \text{const}_z \right. \\
 \Rightarrow \int_{p_0}^p \bar{p}^{-\frac{1}{n}} \partial \bar{p} &= -\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} \int_{z_0}^z \partial \bar{z} && \left| \text{Integration} \right. \\
 \Rightarrow \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \bar{p}^{1 - \frac{1}{n}} \right]_{p_0}^p &= -\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} (z - z_0) && \left| \text{Ränder einsetzen} \right. \\
 \Rightarrow \frac{n}{n-1} \left[p^{\frac{n-1}{n}} - p_0^{\frac{n-1}{n}} \right] &= -\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} (z - z_0) && \left| \text{Umstellen nach } p = p(z) \right. \\
 \Rightarrow p^{\frac{n-1}{n}} &= p_0^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{n}}} (z - z_0) && \left| \text{Ausklammern von } p_0^{\frac{n-1}{n}} \right. \\
 \Rightarrow p^{\frac{n-1}{n}} &= p_0^{\frac{n-1}{n}} \left[1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{p_0} (z - z_0) \right] && \left| \text{Potenzieren } \dots \frac{n-1}{n}, p > 0 \right. \\
 \Rightarrow p(z) &= p_0 \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0) \right]^{\frac{n}{n-1}} && \left| \text{mit } p(z) = \rho^n(z) \frac{p_0}{\rho_0^n} \right. \\
 \Rightarrow \rho^n(z) &= \rho_0^n \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0) \right]^{\frac{n}{n-1}} && \left| \text{Potenzieren } \dots \frac{1}{n}, \rho > 0 \right. \\
 \Rightarrow \rho(z) &= \rho_0 \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_0}{p_0} (z - z_0) \right]^{\frac{1}{n-1}} && (1)
 \end{aligned}$$

Gleichung (1) aus Weg 1 oder 2 formuliert für die Dichte der Luft $\rho_{L,1}$ in der Höhe z_1 :

$$\rho_{L,1} = \rho_L(z = z_1) = \rho_{L,0} \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_{L,0}}{p_{L,0}} (z_1 - z_0) \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

Hinweis: Sowohl die Luft als auch das Füllgas des Ballons mussten nicht als ideales Gas angenommen werden, da wir die polytrope Zustandsänderung als Annahme für die Atmosphäre verwenden. Um die Temperaturverteilung $T(z)$ zu bestimmen, muss aber eine weitere thermische Annahme wie das ideale Gas getroffen werden.

- c) Globale Massenbilanz um das Füllgas im Ballon. Da der Ballon geschlossen ist, gibt es keine konvektiven Massenströme aus dem Ballon, so dass der Ballon ein Kontrollsystem ist:

$$\begin{aligned} \frac{dm_G}{dt} &= 0 \quad \left| \text{Integration} \int_{t_0}^{t_1} dt \right. \\ \Rightarrow m_{G,1} - m_{G,0} &= 0 \\ \Rightarrow m_G &= m_{G,0} = m_{G,1} \quad \left| \text{homogene Dichte } m_{G,i} = \rho_{G,i} V_{G,i} \right. \\ \Rightarrow \rho_{G,0} V_0 &= \rho_{G,1} V_1 \\ \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} &= \frac{\rho_{G,1}}{\rho_{G,0}} \end{aligned}$$

Da der Zustand des Gases im ideal schlaffen Ballon, also Druck und Temperatur, zu jeder Zeit dem Zustand der Atmosphäre entspricht, also $p_L(z) = p_G(z)$ und $T_L(z) = T_G(z) \quad \forall z \in [z_0, z_1]$, und das Füllgas als ideales Gas angenommen wird, erfährt die Dichte des Füllgases ρ_G ebenfalls eine polytrophe Zustandsänderung für $z_0 \leq z \leq z_1$:

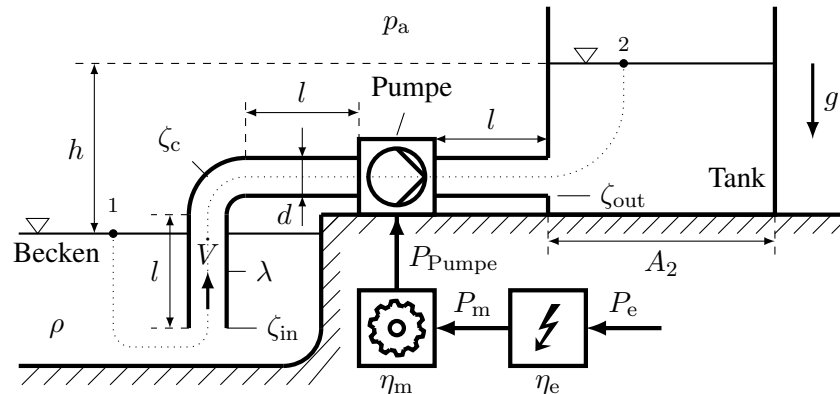
$$\begin{aligned} p_G &= \rho_G R_{s,G} T_G \\ \Rightarrow \rho_G &= \frac{p_G}{R_{s,G} T_G} \quad \left| \rho_G \text{ ist polytrop, da } p_G, T_G \text{ polytrop sind} \right. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Annahmen, dass der Ballon ideal schlaff und das Füllgas ein ideales Gas ist, helfen lediglich dabei zu schlussfolgern, dass sich die Dichte des Füllgases polytrop mit der Atmosphäre ändert, ohne dass das ideale Gasgesetz für das Füllgas im Nachfolgenden genutzt werden muss.

Mittels der in Gleichung (1) hergeleiteten polytropen Zustandsänderung für das Füllgas kann nun die maximale Steighöhe z_1 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} &= \frac{\rho_{G,1}}{\rho_{G,0}} = \left[1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_{G,0}}{p_{L,0}} (z_1 - z_0) \right]^{\frac{1}{n-1}} \\ \Rightarrow \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} &= 1 - \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_{G,0}}{p_0} (z_1 - z_0) \\ \Rightarrow \frac{n-1}{n} g \frac{\rho_{G,0}}{p_{L,0}} (z_1 - z_0) &= 1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \\ \Rightarrow z_1 - z_0 &= \frac{n}{n-1} \frac{p_{L,0}}{g \rho_{G,0}} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right] \\ \Rightarrow z_1 &= z_0 + \frac{n}{n-1} \frac{p_{L,0}}{g \rho_{G,0}} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right] \quad \left| \text{mit } \rho_{G,0} = \frac{m_G}{V_0} \right. \\ \Rightarrow z_1 &= z_0 + \frac{n}{n-1} \frac{p_{L,0} V_0}{g m_G} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

2. Aufgabe



- a) Bernoulli von Punkt 1, der Wasseroberfläche im Becken, über die Rohrleitung und die Pumpe nach Punkt 2, der Wasseroberfläche im offenen Tank:

$$p_1 + \rho g h_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \Delta p_{1,2}^{\text{Arbeit}} = p_2 + \rho g h_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \Delta p_{1,2}^{\text{Verlust}} + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Annahmen laut Aufgabenstellung und eigene Konventionen:

- Offenes Becken und offener Tank: $p_1 = p_2 = p_a$
- Konvention: Höhennullniveau bei 1, so dass $h_1 = 0$ und $h_2 = h$
- Sehr großes Becken: $v_1 = 0$
- Sehr großer Tank, also $A_2 \rightarrow \infty$: $v_2 = 0$
- Stationärer Betrieb: $\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0$
- Pumpenleistung pro Volumenstrom vorhanden: $\Delta p_{1,2}^{\text{Arbeit}} = \Delta p_{\text{Pumpe}} > 0$
- Strömungsverluste vorhanden: $\Delta p_{1,2}^{\text{Verlust}} = \Delta p_{\text{Verlust}} > 0$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow \Delta p_{\text{Pumpe}} = \rho g h + \Delta p_{\text{Verlust}}$$

Die gesamten Strömungsverluste setzen sich aus den folgenden Teilverlusten für den Eintritt, die Krümmung, die Rohrleitung vor und nach der Pumpe und den Austritt zusammen:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{Verlust}} &= \rho \sum_i \zeta_i \frac{v_i^2}{2} \\ &= \rho \left(\zeta_{\text{in}} \frac{v_{\text{in}}^2}{2} + \lambda \frac{2l}{d} \frac{v_L^2}{2} + \zeta_c \frac{v_c^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v_L^2}{2} + \zeta_{\text{out}} \frac{v_{\text{out}}^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Dank der Kontinuitätsgleichung und der Gleichheit aller Querschnittsflächen der Rohrleitung, das heißt $A_{\text{in}} = A_{\text{L}} = A_{\text{c}} = A_{\text{out}} = A = \pi d^2/4$, gilt:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= A_{\text{in}}v_{\text{in}} = A_{\text{L}}v_{\text{L}} = A_{\text{c}}v_{\text{c}} = A_{\text{out}}v_{\text{out}} \\ \Rightarrow v_{\text{in}} &= v_{\text{L}} = v_{\text{c}} = v_{\text{out}} = v = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für Gesamt-Strömungsverlust:

$$\Rightarrow \Delta p_{\text{Verlust}} = \rho \underbrace{\left(\underbrace{\zeta_{\text{in}} + \zeta_{\text{c}} + \zeta_{\text{out}}}_{=\zeta} + \lambda \frac{3l}{d} \right)}_{=\zeta^{\text{tot}}} \frac{v^2}{2} = \rho \zeta^{\text{tot}} \frac{\dot{V}^2}{2A^2} = \rho \zeta^{\text{tot}} \frac{4^2 \dot{V}^2}{2\pi^2 d^4} = \rho \zeta^{\text{tot}} \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d^4}$$

Insgesamt muss folgende Druckdifferenz über die Pumpe bereit gestellt werden:

$$\Rightarrow \Delta p_{\text{Pumpe}} = \rho gh + \rho \left(\zeta + \lambda \frac{3l}{d} \right) \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d^4}$$

b) Die Wirkungsgrade sind wie folgt definiert:

$$\eta_e = \frac{P_{\text{m}}}{P_e} \quad \text{und} \quad \eta_{\text{m}} = \frac{P_{\text{Pumpe}}}{P_{\text{m}}}$$

Damit ergibt sich für die elektrische Leistung, die zum stationären Betrieb der Pumpe nötig ist:

$$P_e = \frac{P_{\text{Pumpe}}}{\eta_e \eta_{\text{m}}}$$

Die Druckänderungsleistung des inkompressiblen Fluids über die Pumpe entspricht der Pumpenleistung mit:

$$P_{\text{Pumpe}} = \Delta p_{\text{Pumpe}} \dot{V}$$

Das Endergebnis erhält man mit dem Ausdruck aus a):

$$P_e = \frac{\left[\rho gh + \rho \left(\zeta + \lambda \frac{3l}{d} \right) \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d^4} \right] \dot{V}}{\eta_e \eta_{\text{m}}}$$

c) Der fluiddynamische Wirkungsgrad der Rohrleitung η_{fd} ohne Pumpen-Getriebe-Wirkungsgrad η_{m} und ohne elektrischen Wirkungsgrad η_e errechnet sich zu:

$$\eta_{\text{fd}} = \frac{\rho gh \dot{V}}{P_{\text{Pumpe}}} = \frac{\rho gh \dot{V}}{\Delta p_{\text{Pumpe}} \dot{V}} = \frac{\rho gh}{\Delta p_{\text{Pumpe}}} = \frac{\rho gh}{\rho gh + \Delta p_{\text{Verlust}}} \stackrel{\rho \geq 0}{=} \frac{gh}{gh + \left(\zeta + \lambda \frac{3l}{d} \right) \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d^4}}$$

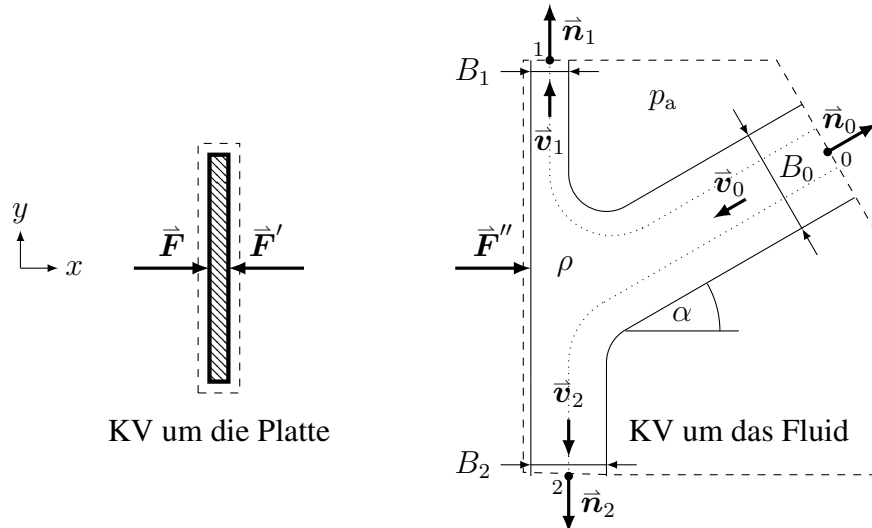
Plausibilitätsprüfung: Insofern keine Verluste auftreten, also $\Delta p_{\text{Verlust}} = 0$, ist der fluiddynamische Wirkungsgrad ideal $\eta_{\text{fd}} = 1$ und für reale Verluste $\Delta p_{\text{Verlust}} > 0$ gilt $0 < \eta_{\text{fd}} < 1$.

d) Der Gesamte Wirkungsgrad ist somit:

$$\eta = \eta_{fd} \eta_m \eta_e = \frac{P_{\text{Pumpe}}^{\text{verlustfrei}}}{P_e} = \frac{\rho g h \dot{V}}{P_e} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}}$$
$$\Rightarrow \eta = \frac{gh \eta_m \eta_e}{gh + \left(\zeta + \lambda \frac{3l}{d}\right) \frac{8\dot{V}^2}{\pi^2 d^4}}$$

3. Aufgabe

- a) Für den Impulssatz wird folgendes gestrichelt gekennzeichnetes Kontrollvolumen um das Fluid im Strahl betrachtet. Für ein besseres Verständnis der Kräfte die zwischen Fluid und Platte wirken, ist zudem das Kontrollvolumen um die Platte und die durch den Schnitte sichtbar gemachte Kraft \vec{F}' gegeben:



Wichtig: Die Skizze des Kontrollvolumens muss konsistent mit der Impulsbilanz sein.

Alternative: Es kann auch direkt ein Kontrollvolumen um die Strahlen und die Platte gewählt werden.

In x -Richtung, also Skalarmultiplikation mit \vec{e}_x , liefert die globale Impulsbilanz:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\rho v_0 B_0 T \underbrace{\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_x}_{=-v_0 \cos \alpha} + \rho v_1 B_1 T \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{e}_x}_{=0} + \rho v_2 B_2 T \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{e}_x}_{=0} &= \underbrace{\vec{F}'' \cdot \vec{e}_x}_{=F_x''} - \rho g V \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0} \\ \Rightarrow \rho v_0^2 \cos(\alpha) B_0 T &= F_x'' \end{aligned}$$

Damit folgt für die Kraft von der Platte auf das Fluid pro Tiefenausdehnung:

$$\frac{F_x''}{T} = \rho v_0^2 \cos(\alpha) B_0$$

Die horizontale Kraft vom Fluid auf die Platte \vec{F}' ist betraglich gleich der Kraft \vec{F}'' , aber wie in der Skizze gezeigt nach dem dritten Newton'schen Gesetz (Wechselwirkungsgesetz) entgegengesetzt, das heißt $\vec{F}' = -\vec{F}''$.

$$\frac{F_x'}{T} = -\rho v_0^2 \cos(\alpha) B_0$$

Da die Strömung im Strahl reibungsfrei und somit ohne Wandhaftung ist, ergibt sich für die vertikale Kraft auf die Platte mit $F'_y = -F_y$:

$$\frac{F''_y}{T} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{F'_y}{T} = 0$$

Hinweis: Die vertikale Kraft folgt aus der Annahme der Reibungsfreiheit beziehungsweise Verlustfreiheit beziehungsweise aus der Impulsbilanz in y -Richtung um die Platte mit $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$.

- b) Für eine verlustfreie $\Delta p^{\text{Verlust}} = 0$, arbeitsfreie $\Delta p^{\text{Arbeit}} = 0$, stationäre Strömung $\partial/\partial t = 0$ von Blockprofilen in den Strahlen $p_0 = p_1 = p_2 = p_a$, horizontalen Strahl $h_0 = h_1 = h_2$, können die beiden folgenden Bernoulli-Gleichungen aufgestellt werden:

$$0 \rightarrow 1: \quad \cancel{p_0 + \rho g h_0} + \rho \frac{v_0^2}{2} + \Delta p_{0,1}^{\text{Arbeit}} = \cancel{p_1 + \rho g h_1} + \rho \frac{v_1^2}{2} + \Delta p_{0,1}^{\text{Verlust}} + \rho \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow v_0 = v_1$$

$$0 \rightarrow 2: \quad \cancel{p_0 + \rho g h_0} + \rho \frac{v_0^2}{2} + \Delta p_{0,2}^{\text{Arbeit}} = \cancel{p_2 + \rho g h_2} + \rho \frac{v_2^2}{2} + \Delta p_{0,2}^{\text{Verlust}} + \rho \int_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow v_0 = v_2$$

$$\text{Insgesamt: } v_0 = v_1 = v_2$$

Hinweis: Die Zustände bei $0'$, oberhalb von 0, und $0''$, unterhalb von 0, sind auf Grund der Annahme von Blockprofilen gleich, so dass $0' = 0'' = 0$ gilt. Aus diesem Grund werden die Punkte zu 0 zusammen gefasst.

Die Kontinuitätsgleichung für Kontrollvolumen um das Fluid lautet:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV}_{=0, \text{ da stationär}} + \oint_{\partial V} \rho (\vec{v}_{\text{rel}} \cdot \vec{v} d\vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow -v_0 B_0 + v_1 B_1 + v_2 B_2 = 0 \quad \left| \text{mit } v_0 = v_1 = v_2 \neq 0 \right.$$

$$\Rightarrow -B_0 + B_1 + B_2 = 0$$

$$\Rightarrow B_0 = B_1 + B_2$$

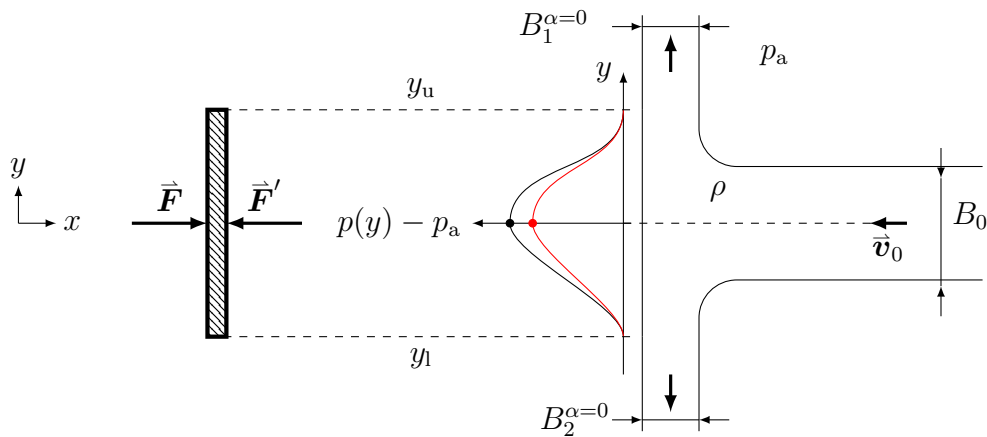
Impulsbilanz in y -Richtung um das Fluid im Strahl:

$$\begin{aligned}
 -\rho v_0 B_0 T \underbrace{\vec{v}_0 \cdot \vec{e}_y}_{=-v_0 \sin(\alpha)} + \rho v_1 B_1 T \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{e}_y}_{=v_1} + \rho v_2 B_2 T \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{e}_y}_{=-v_2} &= \underbrace{\vec{F}' \cdot \vec{e}_y}_{=F'_y=0} \quad \left| \text{mit } \rho \neq 0, T \neq 0 \right. \\
 \Rightarrow v_0^2 \sin(\alpha) B_0 + v_1^2 B_1 - v_2^2 B_2 &= 0 \quad \left| \text{mit } v_0 = v_1 = v_2 \neq 0 \right. \\
 \Rightarrow \sin(\alpha) B_0 + B_1 - B_2 &= 0 \quad \left| \text{mit } B_2 = B_0 - B_1 \right. \\
 \Rightarrow \sin(\alpha) B_0 + 2B_1 - B_0 &= 0 \\
 \Rightarrow B_1 &= \frac{B_0}{2} (1 - \sin(\alpha)) \\
 \text{und} \\
 \Rightarrow B_2 &= \frac{B_0}{2} (1 + \sin(\alpha))
 \end{aligned}$$

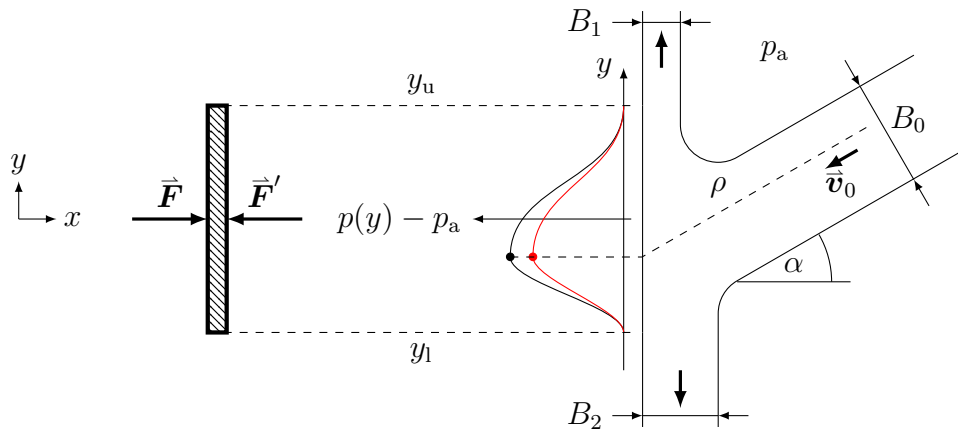
- c) Wie der folgenden Formel entnommen werden kann, ist der Überdruck über die Plattenfläche die Ursache für die Kraft, die auf die Platte ausgewirkt werden muss, um die Platte ortsfest zu halten:

$$\vec{F}' = \int_{A_{\text{Platte}}} -(p - p_a) d\vec{A}$$

Skizze des Überdruckprofils $\Delta p(y) = p(y) - p_a$ über die Platte für $\alpha = 0$



Skizze des Überdruckprofils $\Delta p(y) = p(y) - p_a$ über die Platte für $\alpha > 0$



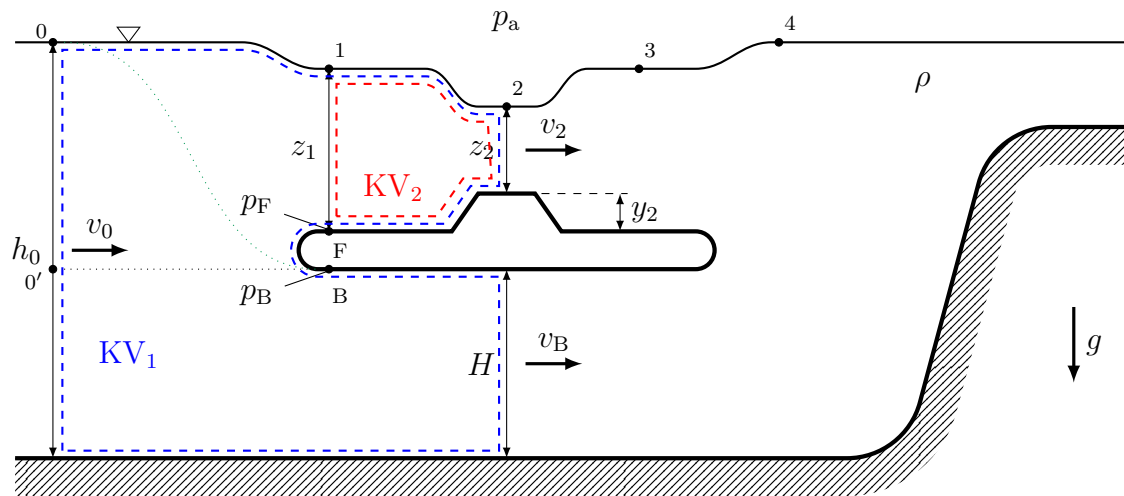
Der Verlauf $\Delta p(y) = p(y) - p_a$ für den reibungsfreien Fall ist jeweils in schwarz und der Verlauf des reibungsbehafteten Fall in rot gegeben. Die strahlteilende Stromlinie ist gestrichelt gekennzeichnet.

- An den Enden der scharfkantigen Platte muss der Druck glatt, das heißt ohne Sprünge, auf $p(y = y_{l,u}) = p_a$ abfallen, so dass $\Delta p(y = y_{l,u}) = p(y = y_{l,u}) - p_a = 0$ gilt.
- Der Verlauf für $\alpha = 0$ ist symmetrisch zur y -Achse und das Maximum befindet sich in etwa dort, wo die strahlteilende Stromlinie auf die Platte trifft.
- Der Verlauf für $\alpha > 0$ ist asymmetrisch zur y -Achse und das Maximum befindet sich in etwa dort, wo die strahlteilende Stromlinie auf die Platte trifft.
- Bevor der Strahl auf die Platte trifft, wird im reibungsbehafteten Fall auf Grund der Dissipation mechanische Energie, wie kinetische und Druckenergie, in thermische Energie umgewandelt. Infolgedessen weist der Druckverlauf im reibungsbehafteten Fall über die Platte einen geringeren Überdruck auf als im reibungsfreien Fall, so dass die Gesamtkraft ebenfalls geringer ausfällt.

Hinweis:

- Die Kraft \vec{F}' auf die Platte kann über ein orientiertes Oberflächenintegral des Überdrucks Δp über die Plattenfläche berechnet werden. Dafür ist aber die Kenntnis der Strömung innerhalb des Kontrollvolumens nötig, die durch lokale Bilanzen errechnet werden können.
- Bei Verwendung der globalen Impulsbilanz ist keine Kenntnis der Strömung innerhalb des Kontrollvolumens nötig, dafür müssen aber die An- und Abströmverhältnisse (Kinematik) bekannt sein.

4. Aufgabe



Hinweis: Da das U-Boot als unendlich ausgedehnt angenommen wird, wird die Strömung als zweidimensional betrachtet und kann als eine Rechteck-Gerinneströmung analysiert werden.

a) Annahmen:

- Bei vernachlässigbarer Oberflächenspannung herrscht Atmosphärendruck direkt oberhalb und unterhalb der Wasseroberfläche: $p_0 = p_1 = p_2 = p_a$
- Gegebene bzw. gemessene Drücke an Oberseite der Front p_F und an der Bodenseite p_B
- Arbeitsfreie Strömung: $\Delta p^{\text{Arbeit}} = 0$
- Verlustfreie Strömung: $\Delta p^{\text{Verlust}} = 0$
- Stationäre Strömung: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$
- inkompressibles Fluid $\rho = \text{const}$

Bernoulli von Punkt $0'$ unterhalb der Wasseroberfläche bis zur Bodenseite des U-Boots bei Punkt B entlang einer Stromlinie mit der hydrostatischen Beziehung $p_{0'} = p_a + \rho g(h_0 - H)$:

$$p_{0'} + \rho g h_{0'} + \frac{\rho}{2} v_{0'}^2 + \Delta p_{0' \rightarrow B}^{\text{Arbeit}} = p_B + \rho g h_B + \frac{\rho}{2} v_B^2 + \Delta p_{0' \rightarrow B}^{\text{Verlust}} + \int_0^B \rho \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Da es sich zudem um eine rotationsfreie Strömung handelt, kann der Bernoulli auch direkt von 0 an der Wasseroberfläche bis zur Bodenseite des U-Boots B entlang einer beliebigen Kurve aufgestellt werden:

$$p_0 + \rho g h_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 + \Delta p_{0 \rightarrow B}^{\text{Arbeit}} = p_B + \rho g h_B + \frac{\rho}{2} v_B^2 + \Delta p_{0 \rightarrow B}^{\text{Verlust}} + \int_0^B \rho \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{p_a - p_B}{\rho} + 2g(h_0 - H)}$$

b) Annahmen:

- Blockprofile mit $v_i = \text{const}_{A_i}$ bei jeder durchströmter Fläche A_i
- Zweidimensionale Strömung mit Kanalbreite B und $v = \text{const}_T$
- Wasseroberfläche und Grund undurchlässig
- inkompressibles Fluid $\rho = \text{const}$

Stationäre Kontinuitätsgleichung für das Kontrollvolumen KV_1 :

$$v_0 h_0 B - v_2 z_2 B - v_B H B = 0$$

Mit den breitenspezifischen Volumenstrom $q = v_2 z_2$ und $B \neq 0$ ergibt sich:

$$\Rightarrow q = v_0 h_0 - v_B H$$

Bernoulli von 1 an der Wasseroberfläche bis F an der U-Boot-Front oder Hydrostatik:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \Delta p_{1 \rightarrow F}^+ = p_F + \rho g z_F + \frac{\rho}{2} v_F^2 + \Delta p_{1 \rightarrow F}^- + \int_1^F \rho \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{p_F - p_a}{\rho g}$$

Hinweis: Ein Bernoulli von $0'$ nach F beinhaltet die unbekannte Wasserspiegelhöhendifferenz zwischen 0 und 1. Infolgedessen hilft dieser Bernoulli nicht dabei, die Aufgabe direkt zu lösen.

Gerinneströmung von 1 nach 2, also Bernoulli entlang der Wasseroberfläche von 1 nach 2:

$$H_1^{\text{ges}} = H_2^{\text{ges}} + \Delta h_{1 \rightarrow 2}^{\text{Verlust}} \quad \left| \text{kein Wassersprung von 1 nach 2: } \Delta h_{1 \rightarrow 2}^{\text{Verlust}} = 0 \right.$$

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + z_2 + \underbrace{\frac{v_2^2}{2g}}_{=H_{\min}} \quad \left| \text{kritischer Zustand bei 2: } H_2 = H_{\min} \right.$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow y_2 = z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - H_{\min} \quad (2)$$

Mit einer stationären Kontinuitätsgleichung für das Kontrollvolumen KV_2 ergibt sich ein Ausdruck für v_2 :

$$v_1 z_1 B - v_2 z_2 B = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{z_2}{z_1} v_2 = \frac{q}{z_1}$$

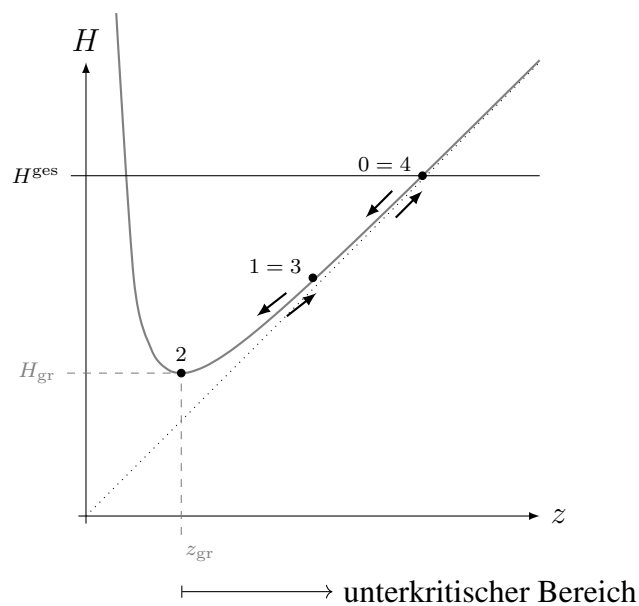
Einsetzen der gegebenen Beziehungen im Hinweis wie $H_{\min} = \frac{3}{2}z_{\text{gr}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ in Gleichung (2) liefert:

$$\Rightarrow y_2 = z_1 + \frac{q^2}{2gz_1^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

Mit $z_1 = \frac{p_F - p_a}{\rho g}$ und $q = v_0 h_0 - v_B H$ ergibt sich schließlich:

$$\Rightarrow y_2 = \frac{p_F - p_a}{\rho g} + \frac{(v_0 h_0 - v_B H)^2 \rho^2 g}{2(p_F - p_a)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{(v_0 h_0 - v_B H)^2}{g}}$$

c) Skizze des Energiehöhen-Diagramms von 0 nach 4 entlang der Wasseroberfläche:

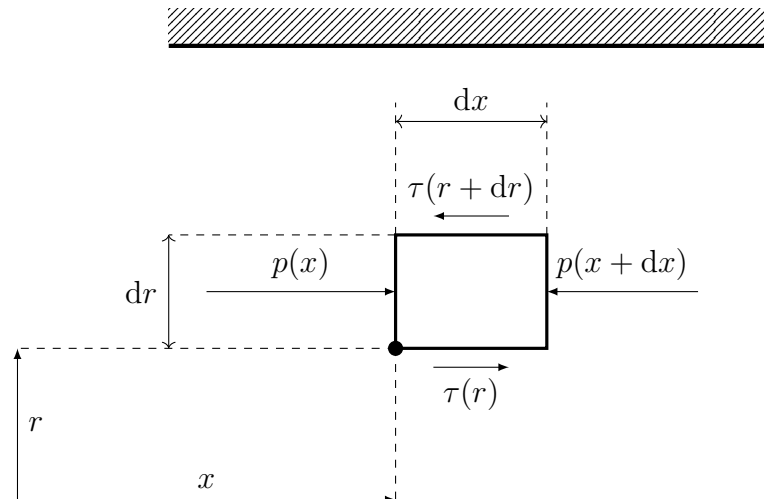


Kriterien an die Skizze

- Achsenbeschriftung H als Ordinate und z als Abszisse, und Hauptwinkelhalbierende als Asymptote für $z \rightarrow \infty$
- Qualitativer Verlauf von 0 über 1 bis zum Minimum bei 2 reversibel zurück, also ohne Verluste/Dissipation in einem Wassersprung

5. Aufgabe

- a) Skizze des differentiellen Volumenelements zur Herleitung der Differentialgleichung mit Annahme der Schubspannungen nach negativer Konvention. Hier gibt es Möglichkeiten einmal am allgemeinen Element in Zylinderkoordinaten (Kuchenstückelement) oder am Ringelement, da das Problem rotationssymmetrisch ist und somit $\partial/\partial\varphi = 0$. Nachfolgend wird exemplarisch das Element in Zylinderkoordinaten in der x - r -Ebene in der oberen Hälfte des Rohrs herangezogen.



Stationärer Impulssatz bzw. Impulsbilanz am zylindrischen differentiellen Element in x -Richtung: Die konvektiven Terme auf der linken Seite fallen auf Grund der ausgebildeten laminaren Strömung zu Null weg.

$$0 = p(x, r) r dr d\varphi - p(x + dx, r) r dr d\varphi + \tau(x, r) r d\varphi dx - \tau(x, r + dr)(r + dr) d\varphi dx$$

Hinweis: In Zylinderkoordinaten ist der obere Radius mit dem hier gewählten Entwicklungspunkt $r + dr$.

Auf Grund der Rotationssymmetrie sind alle Strömungsgrößen bezüglich des Umfangswinkels φ konstant, also zum Beispiel $u = \text{const}_\varphi$ bzw. $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$. Nach Integration über den gesamten Umfang des differentiellen Elements, also $\int_0^{2\pi}$, erhält man die Impulsbilanz am differentiellen zylindrischen Ringelement als Spezialfall.

$$\Rightarrow 0 = 2\pi p(x, r) r dr - 2\pi p(x + dx, r) r dr + 2\pi \tau(x, r) r dx - 2\pi \tau(x, r + dr)(r + dr) dx$$

Mit $d\varphi \neq 0$ beziehungsweise $2\pi \neq 0$ folgt:

$$\Rightarrow 0 = p(x, r) r dr - p(x + dx, r) r dr + \tau(x, r) r dx - \tau(x, r + dr)(r + dr) dx$$

Mit der Taylor-Reihenentwicklung am Entwicklungspunkt mit den Koordinaten (x, r) , welcher als Punkt in der obigen Skizze gekennzeichnet ist, gilt:

$$p(x + dx, r) = p(x, r) + dp(x, r) = p(x, r) + \frac{\partial p}{\partial x}(x, r) dx + \frac{\partial p}{\partial r}(x, r) dr$$

$$\tau(x, r + dr) = \tau(x, r) + d\tau(x, r) = \tau(x, r) + \frac{\partial \tau}{\partial x}(x, r) dx + \frac{\partial \tau}{\partial r}(x, r) dr$$

Unter Vernachlässigung der Gravitation, also $g = 0$, ist der Druck unabhängig von r und φ und somit eine reine Funktion in x , also $p(x)$. Diese Erkenntnis kann mit Hilfe einer differentiellen Impulsbilanz in r -Richtung nachgewiesen werden, also $\partial p / \partial r = 0$. Ebenso soll laut Aufgabenstellung angenommen werden, dass die Schubspannung τ eine reine Funktion in r ist, also $\tau(r)$ und $\partial \tau / \partial x = 0$. Somit kann die Taylor-Reihenentwicklung wie folgt geschrieben werden:

$$p(x + dx) = p(x) + dp(x) = p(x) + \frac{dp}{dx}(x) dx$$

$$\tau(r + dr) = \tau(r) + d\tau(r) = \tau(r) + \frac{d\tau}{dr}(r) dr$$

Somit ergibt sich für die Impulsbilanz am differentiellen Element:

$$0 = p(x) r dr - \left[p(x) + \frac{dp}{dx}(x) dx \right] r dr$$

$$\tau(r) r dx - \left[\tau(r) + \frac{d\tau}{dr}(r) dr \right] r dx$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen der Terme ergibt sich:

$$0 = -\frac{dp}{dx} r dr dx - \tau dr dx - \frac{d\tau}{dr} r dr dx - \frac{d\tau}{dr} (dr)^2 dx \quad \left| \text{mit } dr dx \neq 0 \right.$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{dp}{dx} r - \tau - \frac{d\tau}{dr} r - \underbrace{\frac{d\tau}{dr} dr}_{\rightarrow 0} \quad \left| \text{mit } dr \rightarrow 0 \text{ und } r > 0 \right.$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{dp}{dx} - \frac{\tau}{r} - \frac{d\tau}{dr} \quad \left| \text{mit der Produktregel } \frac{\tau}{r} + \frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d(r\tau)}{dr} \right.$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{dp}{dx} - \frac{1}{r} \frac{d(r\tau)}{dr}$$

b) Die zu lösende Differentialgleichung lautet:

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau)}{dr} = -\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d(r\tau)}{dr} = -r \frac{dp}{dx}$$

1. unbestimmte Integration nach r mit $\frac{dp}{dx} = \text{const}_r$:

$$r\tau = -\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dx} + C_1 \quad \left| \text{mit } r > 0 \right.$$

$$\Rightarrow \tau(r) = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}$$

1. Randbedingung: Schubspannungsfreiheit auf der Zylinderachse für $r \rightarrow 0$ (Rotations-symmetrie des Geschwindigkeitsfelds eines Newtonschen Fluids)

$$\tau(r \rightarrow 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Das mechanische Stoffmodell eines inkompressibles Newtonsches Fluids nach negativer Konvention lautet für ein Strömungsfeld, welches nur von der radialen Richtung abhängt (laminare Strömung):

$$\tau = -\eta \frac{du}{dr}$$

Einsetzen des mechanischen Stoffmodells ergibt:

$$\Rightarrow -\eta \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dx}$$

2. unbestimmte Integration nach r mit $\frac{dp}{dx} = \text{const}_r$:

$$\Rightarrow u(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} + C_2$$

2. Randbedingung: Wandhaftung bei $r = R$ mit ortsfester Wand

$$u(r = R) = u_w = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} R^2$$

Somit ergibt sich für das Geschwindigkeitsfeld $u(r)$ als:

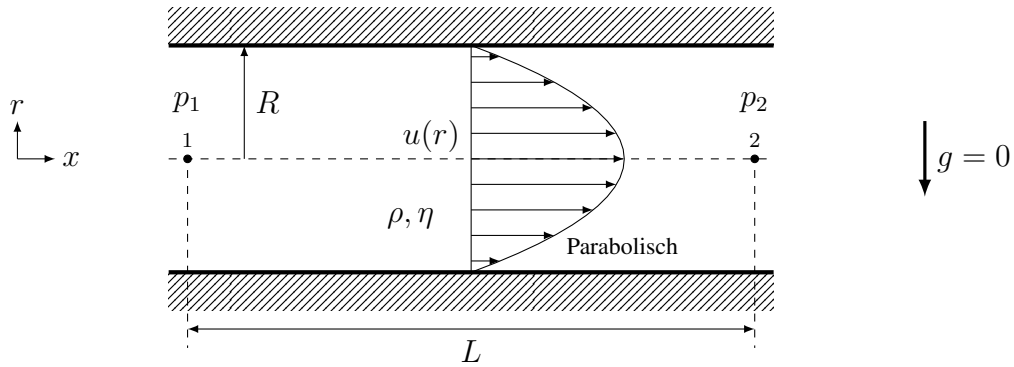
$$u(r) = \frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right]$$

Da es sich um eine voll ausgebildete Strömung handelt, also $\partial u / \partial x = 0$, kann der Druckgradient über folgende lineare Beziehung errechnet werden:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{p_1 - p_2}{L} = \text{const}_x \text{ plausibel wenn } < 0$$

Das Endergebnis ist ein parabolisches Profil:

$$u(r) = \frac{R^2}{4\eta} \underbrace{\frac{p_2 - p_1}{L}}_{<0} \underbrace{\left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right]}_{<0} > 0 \quad \text{für } 0 < r \leq R$$



- c) Die Wandschubspannung τ_w als die Schubspannung, die vom Fluid auf die Wand wirkt, errechnet sich aus der Schubspannung von der Wand auf das Fluid an der Stelle $r = R$ wie folgt:

$$\tau_w = -\tau(r = R) = \frac{R}{2} \frac{p_2 - p_1}{L}$$

Die mittlere Geschwindigkeit u_m ist definiert als:

$$u_m = \frac{\dot{V}}{A} \quad \text{hier mit } A = \pi R^2$$

Der Volumenstrom errechnet sich aus dem Geschwindigkeitsfeld über den Querschnitt A mit $d\vec{A} = \vec{n} dA = \vec{e}_x dA$ und $\vec{v} = u(r)\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_A u(r) \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r) r dr d\varphi \quad \left| \text{mit } u = \text{const}_\varphi \right. \\ \Rightarrow \dot{V} &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_0^R u(r) r dr = 2\pi \int_0^R u(r) r dr \\ \Rightarrow \dot{V} &= 2\pi \int_0^R \underbrace{\frac{R^2}{4\eta} \frac{p_2 - p_1}{L}}_{=\text{const}_r} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right] r dr = \frac{\pi R^4}{2\eta} \frac{p_2 - p_1}{L} \int_0^R \left[\frac{r^3}{R^4} - \frac{r}{R^2} \right] dr \\ \Rightarrow \dot{V} &= \frac{\pi R^4}{2\eta} \frac{p_2 - p_1}{L} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]_0^R \\ \Rightarrow \dot{V} &= -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_2 - p_1}{L} > 0 \quad \text{für } p_1 > p_2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit u_m :

$$u_m = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{p_2 - p_1}{L} > 0 \quad \text{für } p_1 > p_2$$

- d) Der Rohrreibungsbeiwert ist über die folgende Gleichung mittels des Druckverlusts $\Delta p^{\text{Verlust}}$ definiert:

$$\Delta p^{\text{Verlust}} = p_1 - p_2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} u_m^2$$

In der vorherigen Aufgabe wurde ein Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit hergeleitet, der wie folgt umformuliert wird:

$$\begin{aligned} u_m &= -\frac{R^2}{8\eta} \frac{p_2 - p_1}{L} \\ \Leftrightarrow p_1 - p_2 &= \frac{8\eta L}{R^2} u_m \quad \left| \text{erweitern mit } \frac{\rho}{2} u_m \right. \\ \Leftrightarrow p_1 - p_2 &= \frac{16\eta L}{R^2 \rho u_m} \frac{\rho}{2} u_m^2 \stackrel{R=\frac{D}{2}}{=} 64 \underbrace{\frac{\eta}{\rho u_m D}}_{=\text{Re}_D} \underbrace{\frac{L}{D} \frac{\rho}{2} u_m^2}_{=\lambda} \end{aligned}$$

Mit der Definition der Reynoldszahl Re_D und Koeffizientenvergleich mit der Definition des Druckverlusts liefert einen Ausdruck für den Rohrreibungskoeffizienten λ :

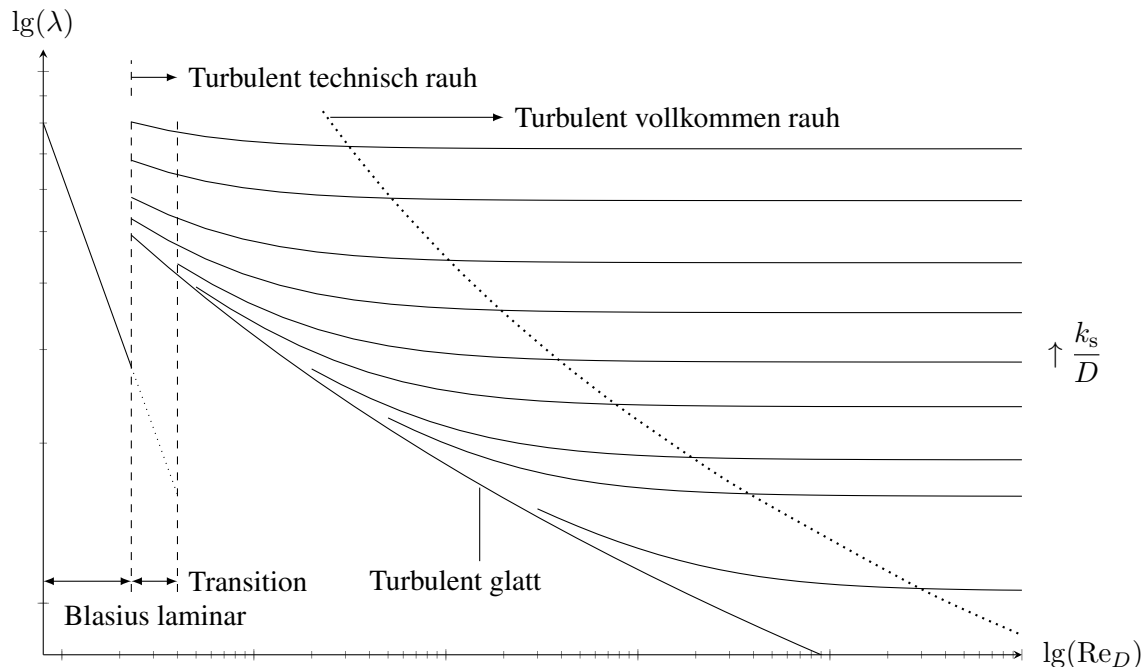
$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_D}$$

Hierbei handelt es sich um den Rohrreibungskoeffizienten für eine laminare, voll ausgebildete, stationäre Strömung eines Newtonschen Fluids durch ein Kreisrohr ohne Einfluss der Gravitation nach Blasius. Siehe auch Hagen-Poiseuille-Strömung.

- e) Insofern der Einfluss der Gravitation über die radiale Ausdehnung nicht vernachlässigt werden darf und es sich nach wie vor um eine stationäre, laminare, voll ausgebildete Strömung handelt, somit $u(r)$ und $\tau(r)$ gelten, kann der Druck nicht mehr eine reine Funktion in x sein. Der Druckgradient $\partial p / \partial x$ ist nach wie vor unabhängig von x , damit die Strömung voll ausgebildet ist. Rechnerisch zeigt sich sogar, dass der Druckgradient $\partial p / \partial x$ konstant ist wie zuvor.

6. Aufgabe

a) Nachfolgend ist eine qualitative Skizze des Moody-Diagramms gegeben:



Kriterien an die Skizze

- Achsenbeschriftung Reibungsbeiwert $\lg(\lambda)$ oder λ als Ordinate und Reynoldszahl $\lg(\text{Re}_D)$ oder $\text{Re}_D = \frac{\rho u_m D}{\eta}$ als Abszisse
- Qualitativer Verlauf der Kurven für den laminaren und turbulent glatten Fall
- Qualitativer Verlauf für den turbulent technisch rauhen und turbulent vollkommen rauhen Fall mit der Kurvenschar, die mit der dimensionslosen relativen Rauheit k_s/D parametrisiert ist. Hierbei ist k_s die äquivalente Sandrauigkeit als eine Längeneinheit. Der kleine nach oben zeigende Pfeil gibt an, in welche Richtung der Wert von k_s/D für die Kurvenschar zunimmt.

b) Für den Druckverlust $\Delta p^{\text{Verlust}}$ gilt die Darcy-Weisbach-Gleichung:

$$\Delta p^{\text{Verlust}} = p_1 - p_2 = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} u_m^2$$

Für den Reibungsbeiwert für eine stationäre, laminare ($0 < \text{Re}_D < 2300$), voll ausgebildete, inkompressible Kreisrohrströmung nach Blasius gilt:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_D} \sim \frac{1}{\text{Re}_D}$$

Einsetzen liefert für das gleiche Fluid, also $\eta, \rho = \text{const}$ unter Verwendung der Kenntnis der Reynoldszahl $\text{Re}_D = \frac{\rho u_m D}{\eta}$:

$$\begin{aligned} \Delta p^{\text{Verlust}} &= \frac{64}{\text{Re}_D} \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} u_m^2 = \frac{64}{\text{Re}_D} \frac{L \eta^2}{2 D^3 \rho} \underbrace{\frac{\rho^2 u_m^2 D^2}{\eta^2}}_{=\text{Re}_D^2} \\ &= \frac{32 L \eta^2}{D^3 \rho} \text{Re}_D \sim \text{Re}_D \quad \text{da } \eta, L, D, \rho = \text{const} \end{aligned}$$

Auch wenn der Reibungsbeiwert λ mit der Reynoldszahl Re_D hyperbolisch mit erster Ordnung abnimmt, nimmt der Druckverlust insgesamt linear mit der Reynoldszahl Re_D im laminaren Fall zu.

- c) Für stationäres Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \text{const}_t$ stimmen Stromlinie, Bahnlinie und Rauchlinie überein.
- d) Ansatz von Boussinesq für die turbulente Schubspannung mit der turbulenten Viskosität η_t :

$$\tau_t = \bar{\tau}_t = -\rho \overline{u'v'} = \eta_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{V}, \forall t \in \mathcal{T}$$

Ansatz der Prandtl'schen Mischungsweghypothese für die turbulente Viskosität mit dem mittleren Mischungsweg l :

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{V}, \forall t \in \mathcal{T}$$