

.....  
(Matr.-Nr, Unterschrift)

**Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik I“**

12. 08. 2024

## 1. Aufgabe

- a) Gegebene differentielle Impulsbilanz in  $z$ -Richtung für den statischen Fall:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho(z)g$$

Mit dem konstanten/homogenen Dichtefeld von Wasser:

$$\rho(z) = \rho_W = \text{const} \quad \text{für } 0 \leq z \leq H$$

Daraus ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_W g = \text{const} \quad \text{für } 0 \leq z \leq H$$

Unbestimmte Integration nach  $z$  liefert:

$$\Rightarrow p(z) = \rho_W g z + C \quad \text{für } 0 \leq z \leq H$$

Bestimmen der Integrationskonstanten über die Randbedingung des Umgebungsdruckes  $p_a$  bzw. über die Kontinuität an der Phasengrenze auf Grund der zu vernachlässigenden Oberflächenspannung:

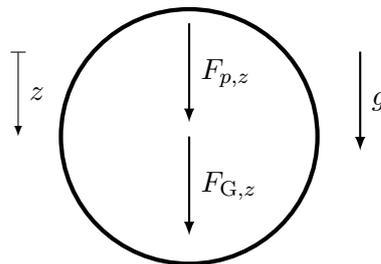
$$p(z = 0) = p_a$$

Insgesamt ergibt sich das Druckfeld mit  $C = p_a$  zu:

$$\Rightarrow p(z) = \rho_W g z + p_a \quad \text{für } 0 \leq z \leq H$$

- b) Statische Impulsbilanz/Kräftegleichgewicht in  $z$ -Richtung für die schwimmende Kugel liefert:

$$0 = F_{p,z} + F_{G,z}$$



---

Die Gewichtskraft der Kugel mit homogener Dichte  $\rho_K = \text{const}$  ergibt sich zu:

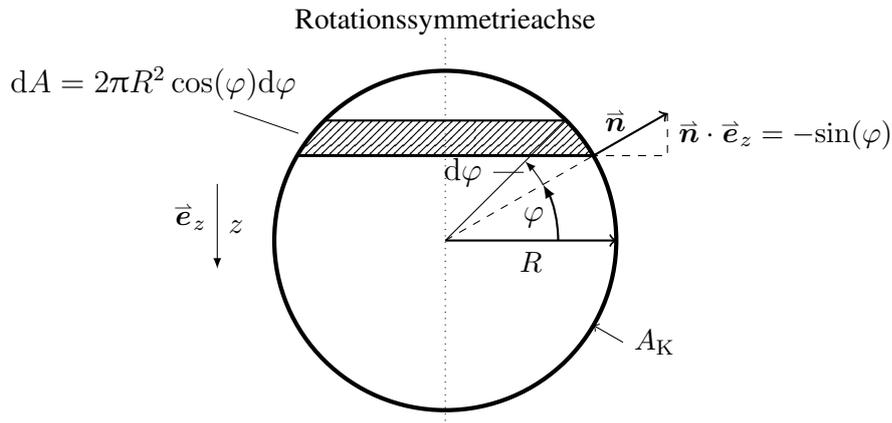
$$\vec{F}_G = \int_{V_K} \rho_K g \vec{e}_z dV \Rightarrow F_{G,z} = |\vec{F}_G| = \rho_K g V_K \Rightarrow F_{G,z} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_K g$$

Gesamte Druckkraft über Verteilung des Druckes über die Kugeloberfläche  $A_K$ :

$$\vec{F}_p = \oint_{A_K} -p \vec{n} dA$$

Für den Auftrieb relevant ist der Anteil in  $z$ -Richtung, d.h.  $F_{p,z} = \vec{F}_p \cdot \vec{e}_z$ :

$$\Rightarrow F_{p,z} = \oint_{A_K} -p \vec{n} \cdot \vec{e}_z dA$$



Mit dem nach außen zeigenden Flächennormalenvektor  $\vec{n} \cdot \vec{e}_z = -\sin(\varphi)$  und dem Hinweis zum differentiellen Kugeloberflächenelement  $dA = 2\pi R^2 \cos(\varphi) d\varphi$  ergibt sich:

$$\Rightarrow F_{p,z} = \oint_{A_K} p \sin(\varphi) 2\pi R^2 \cos(\varphi) d\varphi = \oint_{A_K} -2\pi p R \sin(\varphi) [-R \cos(\varphi) d\varphi]$$

Geometrischer Zusammenhang  $z(\varphi)$ : Koordinatentransformation von  $\varphi$  nach  $z$

$$z = H - R(1 + \sin(\varphi)) \quad \text{siehe Hinweis}$$

$$\Rightarrow z = H - R - R \sin(\varphi) \Rightarrow R \sin(\varphi) = H - R - z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\varphi) = H - R - z \\ dz = -R \cos(\varphi) d\varphi \end{cases}$$

**1. Weg:** Ohne Erkenntnis, dass sich der konstante Umgebungsdruck  $p_a$  herauskürzt

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{p,z} &= -2\pi \oint_{A_K} p(z) [H - R - z] dz = -2\pi \int_{-(2R-H)}^H p(z) [H - R - z] dz \\ &= 2\pi \int_{H-2R}^H p(z) [z + R - H] dz \\ &= 2\pi \underbrace{\int_{H-2R}^0 p(z) [z + R - H] dz}_{\text{oberhalb der Wasseroberfläche}} + 2\pi \underbrace{\int_0^H p(z) [z + R - H] dz}_{\text{unterhalb der Wasseroberfläche}} \\ &= 2\pi \underbrace{\int_{H-2R}^H p_a [z + R - H] dz}_{=0} + 2\pi \underbrace{\int_0^H (p_W(z) - p_a) [z + R - H] dz}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Nachweis, dass das Integral zu Null wegfällt mit  $\zeta = z + R - H$ ,  $d\zeta = dz$ :

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{H-2R}^H p_a [z + R - H] dz &= 2\pi p_a \int_{H-2R+R-H}^{H+R-H} \zeta d\zeta \\ &= 2\pi p_a \int_{-R}^R \zeta d\zeta = 2\pi p_a \left[ \frac{\zeta^2}{2} \right]_{-R}^R \\ &= 2\pi p_a \left[ \frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

**2. Weg:** Mit Erkenntnis, dass sich der konstante Umgebungsdruck  $p_a$  herauskürzt

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{p,z} &= -2\pi \int_0^H (p_W(z) - p_a) [H - R - z] dz \\ &= 2\pi \int_0^H (p_W(z) - p_a) [z + R - H] dz \end{aligned}$$

**1. Weg:** Integration über  $z$  mit der Druckverteilung  $p_W(z) = p(z)$  aus a):

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{p,z} &= 2\pi \int_0^H \rho_W g z [z - H + R] dz \\ &= 2\pi \rho_W g \int_0^H [z^2 - Hz + Rz] dz = 2\pi \rho_W g \left[ \frac{z^3}{3} - \frac{Hz^2}{2} + \frac{Rz^2}{2} \right]_0^H \\ &= 2\pi \rho_W g \left[ \frac{H^3}{3} - \frac{H^3}{2} + \frac{RH^2}{2} \right] = 2\pi \rho_W g \left[ -\frac{H^3}{6} + \frac{RH^2}{2} \right] \\ &= -\rho_W g \pi H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right] < 0 \quad (\text{Auftrieb}), \text{ da } 0 < H \leq 2R \end{aligned}$$

**2. Weg:** Integration über  $\varphi$  und Erkenntnis, dass sich  $p_a$  herauskürzt:

$$\begin{aligned} F_{p,z} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (p_W(z) - p_a) \sin(\varphi) 2\pi R^2 \cos(\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \rho_W g z(\varphi) \sin(\varphi) 2\pi R^2 \cos(\varphi) d\varphi \quad \text{mit } z = H - R - R \sin(\varphi) \\ &= 2\pi R^2 \rho_W g \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (H - R - R \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \rho_W g \int_{\sin(-\frac{\pi}{2})}^{\sin(\alpha)} (H - R - R \sin(\varphi)) \sin(\varphi) d(\sin(\varphi)) \\ &= 2\pi R^2 \rho_W g \left[ \frac{H - R}{2} \sin^2(\varphi) - \frac{R}{3} \sin^3(\varphi) \right]_{\sin(-\frac{\pi}{2})=-1}^{\sin(\alpha)=\frac{H-R}{R}} \\ &= 2\pi \rho_W g \left[ \frac{(H - R)^3}{6} - R^2 \frac{H - R}{2} - \frac{R^3}{3} \right] \\ &= \rho_W g \pi H^2 \left[ \frac{H}{3} - R^2 \right] = -\rho_W g \pi H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right] < 0 \quad (\text{Auftrieb}), \text{ da } 0 < H \leq 2R \end{aligned}$$

Einsetzen in die Impulsbilanz:

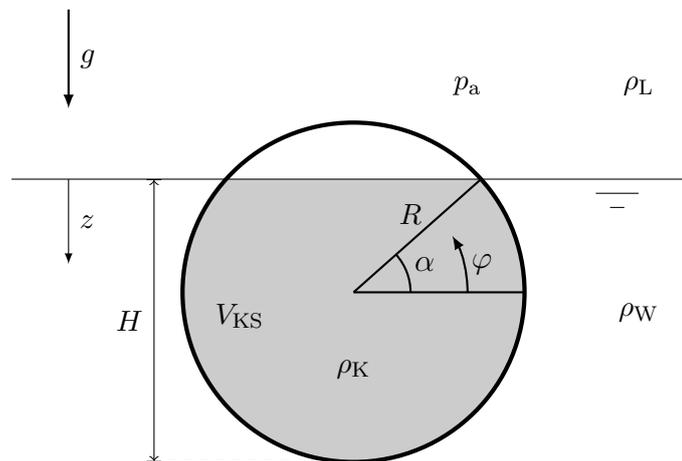
$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow F_{G,z} = -F_{p,z} \\
 &\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_K g = \pi \rho_W g H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right] \\
 &\Rightarrow \frac{4}{3}R^3 \rho_K = \rho_W H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right] \\
 &\Rightarrow \frac{\rho_K}{\rho_W} = \frac{3}{4} \frac{H^2}{R^2} \frac{1}{R} \left[ R - \frac{H}{3} \right] \\
 &\Rightarrow \frac{\rho_K}{\rho_W} = \frac{1}{4} \frac{H^2}{R^2} \left[ 3 - \frac{H}{R} \right] > 0
 \end{aligned}$$

Es gilt  $0 < \frac{\rho_K}{\rho_W} \leq 1$  für  $0 < H \leq 2R$ .

c) Satz von Archimedes: Auftriebskraft als Gesamtdruckkraft über die gesamte Oberfläche

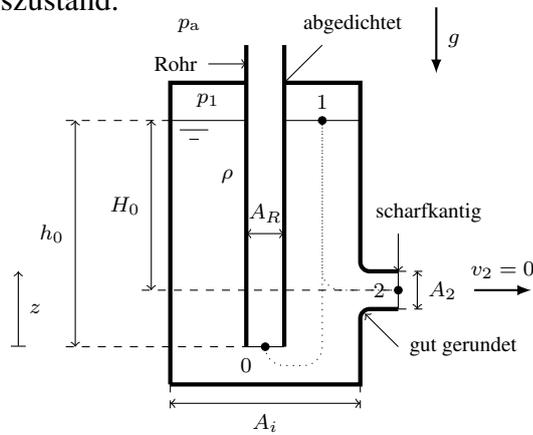
$$\begin{aligned}
 F_{A,z} &= F_{p,z} \\
 \Rightarrow -\rho_W g V_{KS} &= -\rho_W g \pi H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right] \quad \text{mit } \rho_W g \neq 0 \\
 \Rightarrow V_{KS} &= \pi H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right]
 \end{aligned}$$

Der Teil des Volumens der schwimmenden Kugel, welcher zum Auftrieb beiträgt, ist nachfolgend grau skizziert. Es handelt sich um ein Kugelsegment und dessen Volumen beträgt  $V_{KS} = \pi H^2 \left[ R - \frac{H}{3} \right]$ .



## 2. Aufgabe

a) Skizze für den Anfangszustand:



Anfangszustand  $t \leq t_0 = 0$

Statische Kinematik: Kein Fließen

- Ruhendes Fluid  $v_0 = v_1 = v_2 = 0$
- Stationarität  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  auf  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

Bernoulli  $0 \rightarrow 1$  in Wasser:

$$p_a + \rho g z_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 = p_1 + \rho g z_1 + \frac{h_0 \rho}{2} v_1^2 + \rho \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow p_a = p_1 + \rho g h_0$$

$$\Rightarrow p_1 = p_a - \rho g h_0$$

Bernoulli  $1 \rightarrow 2$  in Wasser mit  $z_2 = h_0 - H_0$ : Alternativ kann auch sofort ein Bernoulli von  $0 \rightarrow 2$  gemacht werden

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{h_0 \rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g (h_0 - H_0) + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow p_1 + \rho g h_0 = p_a + \rho g (h_0 - H_0)$$

$$\Rightarrow p_1 = p_a - \rho g H_0$$

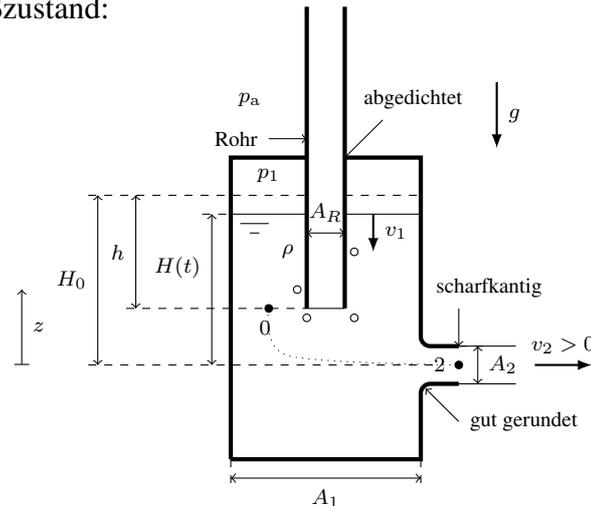
Gleichsetzen der beiden Ergebnisse der Bernoulli-Gleichungen liefert:

$$p_a - \rho g h_0 = p_a - \rho g H_0$$

$$\Rightarrow h_0 = H_0$$

Es fließt kein Wasser aus dem Behälter, solange  $h_0 \geq H_0$  gilt, wobei  $h_0 = H_0$  den Grenzfall darstellt. Generell gilt  $p_1 \leq p_a$ .

b) Skizze für den Fließzustand:



Skizze 2: Fließzustand  $t_0 = 0 < t, h < h_0$

Dynamische Kinematik: Fließen

- Vernachlässigbarer Einfluss der Blasenströmung, so dass  $p_0 = p_a$
- Oberflächengeschwindigkeit  $v_1 = -\frac{dH}{dt}$  mit  $\frac{dH}{dt} < 0$  für physikalische Plausibilität
- Ausfluss  $v_2 > 0$
- Stationarität  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  auf  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

Bernoulli  $0 \rightarrow 2$  in Wasser mit  $z_0 = H_0 - h, z_2 = 0$  und scharfkantiger Auslass  $p_2 = p_a$

$$p_0 + \rho g z_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow \rho g (H_0 - h) = \frac{\rho}{2} [v_2^2 - v_0^2]$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_0^2 = 2g(H_0 - h) = \text{const}_t$$

Kontinuitätsgleichung  $1 \rightarrow 0$  in Wasser:

$$(A_1 - A_R)v_1 = (A_0 - A_R)v_2 \quad \text{mit } A_R \ll A_1 = A_0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_0 = -\frac{dH}{dt} \quad \text{mit Kinematik } v_1 = -\frac{dH}{dt}$$

Kontinuitätsgleichung  $1 \rightarrow 2$  in Wasser:

$$(A_1 - A_R)v_1 = A_2 v_2 \quad \text{mit } A_R \ll A_1$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{mit } A_2 > 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad \text{mit Kinematik } v_1 = -\frac{dH}{dt}$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{A_1}{A_2} \frac{dH}{dt}$$

Einsetzen in den Bernoulli  $0 \rightarrow 2$  liefert:

$$\Rightarrow \left[ -\frac{A_1}{A_2} \frac{dH}{dt} \right]^2 - \left( \frac{dH}{dt} \right)^2 = 2g(H_0 - h)$$

$$\Rightarrow \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \left( \frac{dH}{dt} \right)^2 = 2g(H_0 - h)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{dH}{dt} \right)^2 = \frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1} \quad \text{mit } A_1 > A_2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} \stackrel{!}{<} 0 \quad \text{für physikalische Plausibilität}$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = - \sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} = \text{const}_t$$

Zeitliche Integration mit  $g, A_1, A_2, H_0, h = \text{const} > 0$ :

$$\Rightarrow \int \frac{dH}{dt} dt = \int - \sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} dt + C$$

$$\Rightarrow H(t) = - \sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} t + C$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} H(t = t_0 = 0) &\stackrel{!}{=} H_0 \\ \Rightarrow - \sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} t_0 + C &= H_0 \\ &\Rightarrow C = H_0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich:

$$\Rightarrow H(t) = - \sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} t + H_0$$

Die gesuchte Zeitspanne  $\Delta t = t_\infty - t_0 = t_\infty$  wird über die folgende Bedingung berechnet. Bei der Wasserspiegelhöhe  $H(t_\infty) = H_0 - h$  ist das untere Ende des Rohrs gerade noch eingetaucht.

$$\begin{aligned} H(t_\infty) &\stackrel{!}{=} H_0 - h \\ \Rightarrow -\sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} t_\infty + H_0 &= H_0 - h \\ \Rightarrow -\sqrt{\frac{2g(H_0 - h)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}} t_\infty &= -h \\ \Rightarrow t_\infty &= \sqrt{\frac{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}{2g(H_0 - h)}} h > 0 \quad \text{mit } A_1 > A_2 > 0 \end{aligned}$$

### 3. Aufgabe

a) Annahmenliste:

- Stationäre Strömung  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Horizontale Strömung mit konstanter Gravitation bzw. konstanter Höhenenergie/potentieller Energie oder Vernachlässigung der Gravitation entlang der zentralen Stromlinie.
- Existenz einer Stromröhre konzentrisch mit dem Propellerquerschnitt, welcher enthalten ist. Eindimensionale Strömung
- Homogene oder laminare Geschwindigkeitsprofile am Eintritt und Austritt der Stromröhre
- Drallfreie An- und Abströmung bzw. Dralleffekte haben keinen Einfluss
- Unendlich dünner Propeller  $\Delta x \rightarrow 0$
- Arbeitszufuhr nur beim unendlich dünnen Propeller
- Inkompressibles Fluid bzw. Strömung  $\rho = \text{const}$
- Die Anzahl der Windrad- oder Propellerflügel hat keinen Einfluss.
- Der Einfluss des Bodens, des Gehäuses und der Befestigung ist vernachlässigbar.
- Keine Viskosität und Reibung und somit auch keine Dissipation, also reibungsfrei bzw. verlustfrei
- Örtlich und zeitlich konstanter Atmosphärendruck  $p_a = \text{const}_{\vec{r},t}$  außerhalb der Stromröhre

b) Kontinuitätsgleichung  $1 \rightarrow 2$  in der Stromröhre

$$\rho v' A' = \rho v_2 A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{v'}{v_2} A' \quad \text{mit } v_2 \neq 0$$

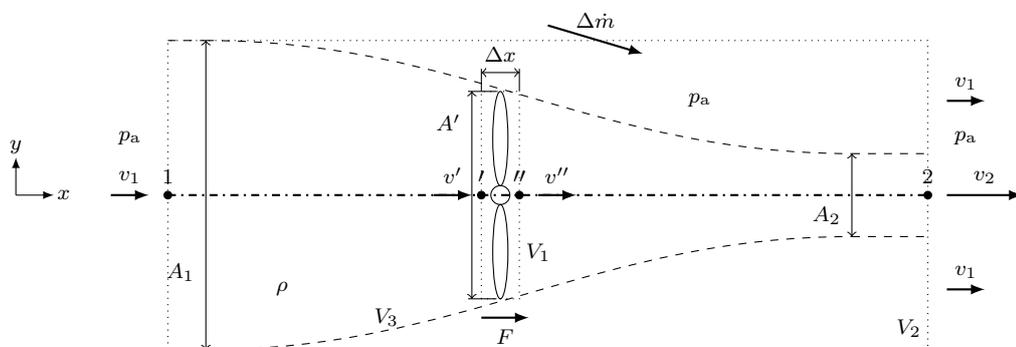
Nach dem Froude'schen Theorem berechnet sich die Geschwindigkeit in der Propellerebene wie folgt.

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Somit ergibt sich das Ergebnis.

$$\Rightarrow A_2 = A' \frac{v_1 + v_2}{2v_2}$$

c) Skizze der möglichen Kontrollvolumina:



## 1. Weg

Stationäre Impulsbilanz in  $x$ -Richtung für das Kontrollvolumen  $V_1$  um den Propeller:

$$-\rho v'^2 A' + \rho v''^2 A'' = p' A' - p'' A'' + F$$

Mit der Annahme eines unendlich dünnen Propellers, d.h.  $\Delta x \rightarrow 0$ , gilt mit  $A' = A''$  nach Massenerhaltung  $v' = v''$  und es ergibt sich:

$$\Rightarrow F = (p'' - p') A' \quad (1)$$

Bernoulli 1  $\rightarrow$  1:

$$p_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p' + \frac{\rho}{2} v'^2 \quad (2)$$

Bernoulli ''  $\rightarrow$  2:

$$p'' + \frac{\rho}{2} v''^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 \quad (3)$$

Die Differenz aus Gleichung (3) und (2) ergibt für die Druckdifferenz:

$$p'' - p' = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

Einsetzen in (1) liefert die Kraft, die auf die Strömung wirkt:

$$F = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) A'$$

## 2. Weg

Stationäre Impulsbilanz in  $x$ -Richtung für das große Kontrollvolumen  $V_2$ :

$$-\Delta \dot{m} v_1 - \rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 + \rho v_1^2 (A_1 - A_2) = p_1 A_1 - p_2 A_2 - p_a (A_1 - A_2) + F$$

Mit den Drücken  $p_1 = p_2 = p_a$  folgt:

$$\Rightarrow F = -\Delta \dot{m} v_1 + \rho A_2 (v_2^2 - v_1^2) \quad (4)$$

Stationäre integrale Kontinuitätsgleichung für das Kontrollvolumen  $V_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{m} + \rho v_1 A_1 - \rho v_2 A_2 - \rho v_1 (A_1 - A_2) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta \dot{m} &= \rho A_2 (v_2 - v_1) \end{aligned}$$

Einsetzen in (4) ergibt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow F &= -\rho A_2 (v_2 - v_1) v_1 + \rho A_2 (v_2^2 - v_1^2) \\ &= \rho A_2 (v_2^2 - v_2 v_1) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Querschnittsfläche  $A'$  aus der Aufgabe a) erhält man:

$$\Rightarrow F = \rho A' \frac{v_1 + v_2}{2 v_2} (v_2^2 - v_2 v_1)$$

$$F = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) A' \quad \text{mit Hilfe des 3. Binoms}$$

### 3. Weg

Stationäre Impulsbilanz in  $x$ -Richtung für die Stromröhre als Kontrollvolumen  $V_3$ :

$$-\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = \oint_{\partial V_3} p_a d\vec{A} \cdot \vec{e}_x + F$$

Kein Massenstrom  $\Delta \dot{m}$  über die Mantelfläche  $A_M$  und Druckkräfte heben sich auf:

$$\Delta \dot{m} = 0 \text{ und } \oint_{\partial V_3} p_a d\vec{A} \cdot \vec{e}_x \stackrel{p_a = \text{const}}{=} \int_{\partial V_3} \vec{\nabla} p_a dV \cdot \vec{e}_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \int_{A_M} p_a d\vec{A} \cdot \vec{e}_x = 0$$

Daraus ergibt sich mit Konti  $A_1 v_1 = A_2 v_2 = A' v'$ :

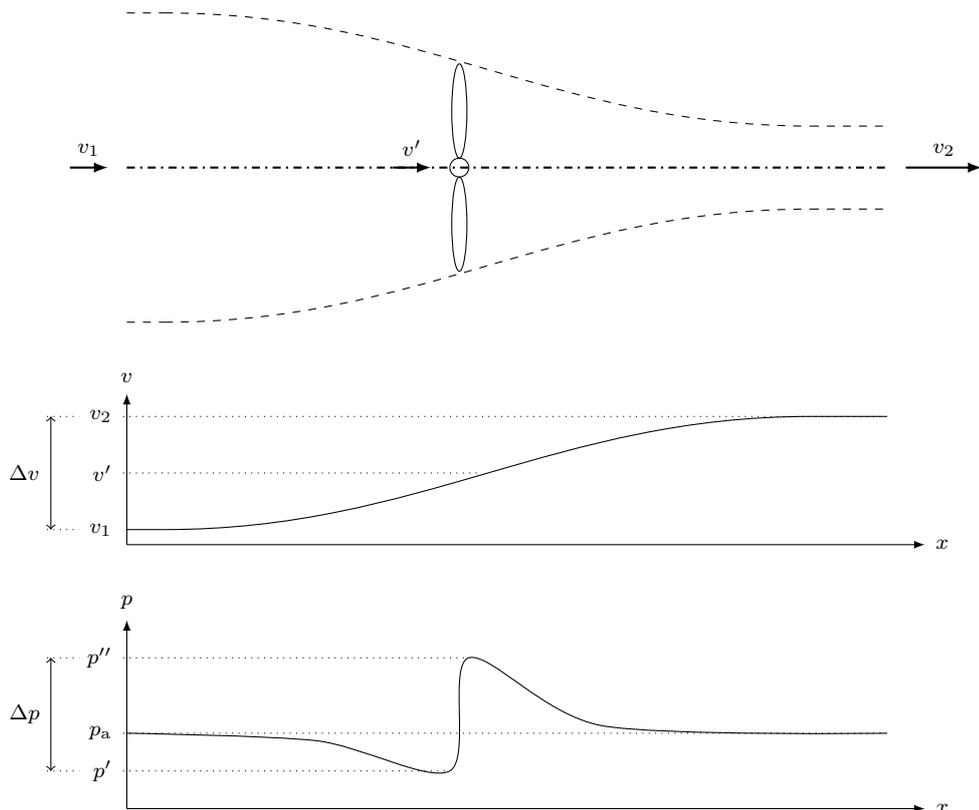
$$\Rightarrow F = -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2$$

$$\Rightarrow F = \rho A' v' (v_2 - v_1) \quad \text{mit } v' = (v_1 + v_2)/2 \text{ und 3. Binom}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) A'$$

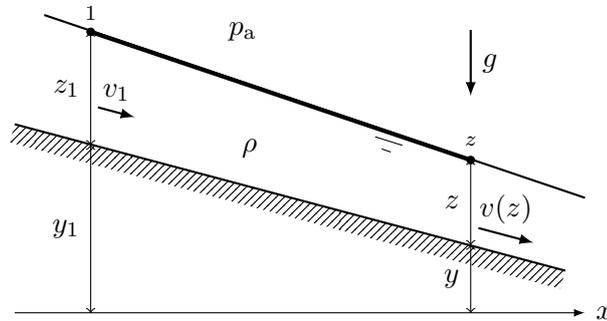
d) Skizze des Verlaufs ...

- ... der Geschwindigkeit  $v(x)$  mit  $v_2 > v_1$  ...
- ... und des Drucks  $p(x)$  mit  $p' < p''$



#### 4. Aufgabe

a) Skizze mit Bernoulli-Verlauf:



Stationäre Bernoulli-Gleichung 1 → z an der Fluidoberfläche:

$$\begin{aligned}
 p_1 + \rho g(y_1 + z_1) + \frac{\rho}{2}v_1^2 &= p(z) + \rho g(y + z) + \frac{\rho}{2}v^2(z) + \Delta p^{\text{Verlust}} \\
 \Rightarrow y_1 + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} &= y + z + \frac{v^2(z)}{2g} + \frac{\Delta p^{\text{Verlust}}}{\rho g} \\
 \Rightarrow y_1 + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} &= y + z + \frac{v^2(z)}{2g} + \Delta h^{\text{Verlust}} \quad \text{in Höhenform} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Stationäre Kontinuitätsgleichung 1 → z:

$$\begin{aligned}
 0 &= \rho A_1 v_1 - \rho A(z) v(z) \quad \text{mit Geschwindigkeits-Blockprofilen} \\
 \Rightarrow A(z)v(z) &= A_1 v_1 = \dot{V} \quad \text{mit } A(z) > 0 \\
 \Rightarrow v(z) &= \frac{\dot{V}}{A(z)} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Gerinnequerschnittsfläche des Rechteck-Gerinnes in Gleichung (6):  $A(z) = Bz$

$$\Rightarrow v(z) = \frac{\dot{V}}{Bz} \quad (7)$$

Einsetzen von (7) in (5) liefert:

$$\Rightarrow y_1 + z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z_1^2} = y + z + \underbrace{\frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}}_{H_{\text{Rechteck}}(z)} + \Delta h^{\text{Verlust}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H_{\text{Rechteck}}^{\text{tot}}}$

Somit ergeben sich für die Energiehöhe  $H(z)$  und die totale Energiehöhe  $H^{\text{tot}}$  die folgenden Ausdrücke für die stationäre offene Gerinneströmung in einem Rechteck-Gerinne:

$$H_{\text{Rechteck}}(z) = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}$$

$$H_{\text{Rechteck}}^{\text{tot}} = y + z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}$$

## b) 1. Weg

Die Grenzfluidtiefe  $z_{\text{gr}}$  ergibt sich aus der Minimierung der Energiehöhe wie folgt:

$$z_{\text{gr}} = \arg \min_{0 < z < \infty} H(z)$$

Notwendige Bedingung im Allgemeinen:  $\frac{dH}{dz}(z_{\text{gr}}) \stackrel{!}{=} 0$

Notwendige Bedingung für das Rechteck-Gerinne:

$$\frac{dH_{\text{Rechteck}}}{dz} = 1 + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2}(-2)\frac{1}{z^3} = 1 - \frac{\dot{V}^2}{gB^2z^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3} = \frac{gB^2}{\dot{V}^2} \Rightarrow z^3 = \frac{\dot{V}^2}{gB^2}$$

$$\Rightarrow z_{\text{gr,Rechteck}} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

Hinweis: Laut Hinweis in der Aufgabenstellung ist die notwendige Optimalitätsbedingung ausreichend und es müssen nicht zusätzlich die hinreichende Bedingung und die Ränder  $z \rightarrow 0$  und  $z \rightarrow \infty$  geprüft werden. Damit sind die Kandidaten aus der notwendigen Bedingung auch die Grenzfluidtiefen bzw. kritischen Fluidtiefen.

## 2. Weg

Alternativ kann die Grenzfluidtiefe  $z_{\text{gr}}$  über die kritische Bedingung mittels der Froude-Zahl bestimmt werden, d.h.  $\text{Fr}(z_{\text{gr}}) = 1$ , wobei die Froude-Zahl für allgemeine Gerinneformen über die mittlere Fluidtiefe  $\bar{z}$  als  $\text{Fr} = v/\sqrt{g\bar{z}}$  definiert ist.

Für das Rechteck-Gerinne gilt nach Gleichung (7)  $v = \dot{V}/(Bz)$  und  $\bar{z} = z$ , so dass die Grenzfluidtiefe  $z_{\text{gr,Rechteck}}$  wie folgt bestimmt werden kann:

$$\text{Fr}(z_{\text{gr}}) = \frac{v(z_{\text{gr}})}{\sqrt{gz_{\text{gr}}}} = \frac{\frac{\dot{V}}{Bz_{\text{gr}}}}{\sqrt{gz_{\text{gr}}}} = \frac{\dot{V}}{B\sqrt{gz_{\text{gr}}^3}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{gz_{\text{gr}}^3} = \frac{\dot{V}}{B} \Rightarrow gz_{\text{gr}}^3 = \frac{\dot{V}^2}{B^2} \Rightarrow z_{\text{gr}} = z_{\text{gr,Rechteck}} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

c) Analoges Vorgehen für das Dreieck-Gerinne wie in a) und b) für das Rechteck-Gerinne  
Gerinnequerschnittsfläche des Dreieck-Gerinnes in Gleichung (6):  $A(z) = \frac{1}{2} 2z z = z^2$

$$\Rightarrow v(z) = \frac{\dot{V}}{z^2} \quad (8)$$

Einsetzen von (8) in (5) liefert:

$$\Rightarrow y_1 + z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2gz_1^4} = y + z + \underbrace{\frac{\dot{V}^2}{2gz^4}}_{H_{\text{Dreieck}}(z)} + \Delta h^{\text{Verlust}} \quad (9)$$

$$\underbrace{\phantom{y + z}}_{H_{\text{Dreieck}}^{\text{tot}}}$$

Somit ergeben sich für die Energiehöhe  $H(z)$  und die totale Energiehöhe  $H^{\text{tot}}$  die folgenden Ausdrücke für die stationäre offene Gerinneströmung in einem Dreieck-Gerinne:

$$H_{\text{Dreieck}}(z) = z + \frac{\dot{V}^2}{2gz^4} \quad (10)$$

$$H_{\text{Dreieck}}^{\text{tot}} = y + z + \frac{\dot{V}^2}{2gz^4} \quad (11)$$

Hinweis: Es gilt  $H^{\text{tot}} = \text{const}$  bzw.  $\Delta h^{\text{Verlust}} = 0$ , insofern kein Wassersprung zwischen Punkt 1 und Punkt  $z$  vorliegt und die Strömung reibungsfrei ist. Die Formeln beider Gerinneformen gleichen sich sehr, aber unterscheiden sich insbesondere bei der Ordnung der Hyperbel, also zweiter Ordnung, d.h.  $1/z^2$ , für das Rechteck-Gerinne und vierter Ordnung, d.h.  $1/z^4$ , für das Dreieck-Gerinne.

### 1. Weg

Notwendige Bedingung für das Dreieck-Gerinne zur Bestimmung der Grenzfluidtiefe:

$$\frac{dH_{\text{Dreieck}}}{dz} = 1 + \frac{\dot{V}^2}{2g}(-4)\frac{1}{z^5} = 1 - \frac{2\dot{V}^2}{gz^5} \stackrel{!}{=} 0 \quad (12)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^5} = \frac{g}{2\dot{V}^2} \Rightarrow z^5 = \frac{2\dot{V}^2}{g} \quad (13)$$

$$\Rightarrow z_{\text{gr,Dreieck}} = \sqrt[5]{\frac{2\dot{V}^2}{g}} \quad (14)$$

### 2. Weg

Für das Dreieck-Gerinne gilt nach Gleichung (8)  $v = \dot{V}/z^2$  und  $\bar{z} = z/2$ , so dass die Grenzfluidtiefe  $z_{\text{gr,Dreieck}}$  wie folgt bestimmt werden kann:

$$\text{Fr}(z_{\text{gr}}) = \frac{v(z_{\text{gr}})}{\sqrt{g\bar{z}}(z_{\text{gr}})} = \frac{\frac{\dot{V}}{z_{\text{gr}}^2}}{\sqrt{g\frac{z_{\text{gr}}}{2}}} = \frac{\dot{V}}{B\sqrt{\frac{g}{2}z_{\text{gr}}^5}} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{2}z_{\text{gr}}^5} = \dot{V} \Rightarrow \frac{g}{2}z_{\text{gr}}^5 = \dot{V}^2 \Rightarrow z_{\text{gr}} = z_{\text{gr,Dreieck}} = \sqrt[5]{\frac{2\dot{V}^2}{g}}$$

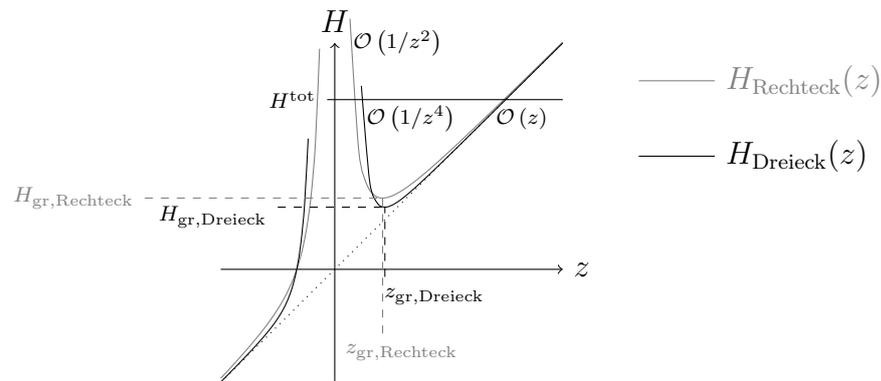
Hinweis: Die mittlere Fluidtiefe kann allgemein über die folgende Definition bestimmt werden, so dass sich für das Dreieck-Gerinne Folgendes ergibt:

$$\bar{z} = \frac{1}{B} \int_B z(b) db \quad \text{mit } z(b) = \begin{cases} -b & \text{für } b \leq 0 \\ +b & \text{für } b > 0 \end{cases} \quad \text{und } B = 2z \text{ für das Dreieck-Gerinne}$$

$$= \frac{1}{2z} \int_{-z}^{+z} z(b) db = \frac{1}{2z} \left[ \int_{-z}^0 -b db + \int_0^z -b db \right] = \frac{1}{2z} \left[ \left[ -\frac{b^2}{2} \right]_{-z}^0 + \left[ \frac{b^2}{2} \right]_0^z \right]$$

$$= \frac{1}{2z} \left[ \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right] = \frac{z^2}{2z} = \frac{z}{2}$$

d) Skizze des Energiehöhen-Diagramms für einen gegebenen Volumenstrom  $\dot{V} = \text{const}$ :



- Grundskizze

- Achsenbeschriftung  $H$  als Ordinate und  $z$  als Abszisse
- Ursprungsgerade als Asymptote für  $z \rightarrow \infty$
- Einen der beiden Verläufe zumindest im physikalische relevanten Bereich qualitativ korrekt gezeichnet (kritischer Punkt)

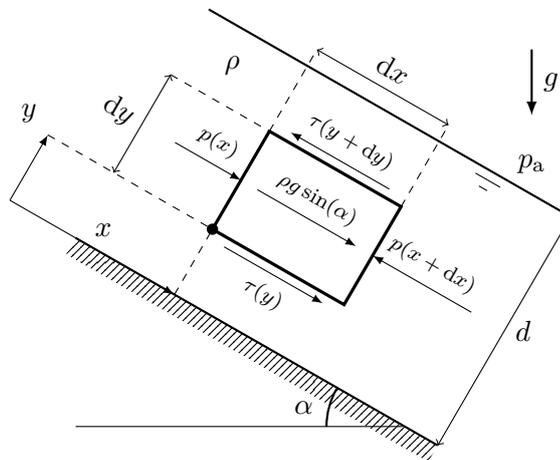
- Qualitativer Unterschied beider Gerinne-Formen

- Beide Verläufe haben die Ursprungsgerade als Asymptote für  $z \rightarrow \infty$
- Rechteck-Gerinne: Ursprungsgerade  $z$  mit einer Hyperbel zweiter Ordnung  $1/z^2$  überlagert
- Dreieck-Gerinne: Ursprungsgerade  $z$  mit einer Hyperbel vierter Ordnung  $1/z^4$  überlagert, somit steiler und schneller asymptotisch für  $z \rightarrow 0$  oder  $z \rightarrow \infty$
- Position der kritischen Punkte unterscheidet sich im Allgemeinen und beide Verläufe sind nicht einfach parallel

Hinweis: In der Skizze sind die Volumenströme und die totale Energiehöhe für beide Gerinneformen nicht zwingend gleich und der Wert der Rechteck-Gerinne-Breite ist nicht gegeben, somit kann auch nicht auf die Reihenfolge der beiden Grenzfluidtiefen geschlossen werden! Einzeichnen der unterkritischen und überkritischen Bereiche ist nicht nötig.

## 5. Aufgabe

- a) Skizze des differentiellen Volumenelements zur Herleitung der Differentialgleichung mit Annahme der Schubspannungen nach negativer Konvention:



Stationärer Impulssatz bzw. Impulsbilanz am kartesischen differentiellen Element in  $x$ -Richtung: Die konvektiven Terme auf der linken Seite fallen auf Grund der ausgebildeten laminaren Strömung zu Null weg.

$$0 = \rho g \sin(\alpha) dx dy dz + p(x) dy dz - p(x + dx) dy dz + \tau(y) dx dz - \tau(y + dy) dx dz$$

Hinweis: Auf Grund der freien Oberfläche (ohne Oberflächenspannung, da  $d = \text{const}$ ) und des über die Höhe konstanten Umgebungsdrucks und der konstanten Filmdicke  $d = \text{const}$ , ist der Druck nur eine Funktion in  $y$  und nicht in  $x$ .

Ergo, handelt es sich um ein rein durch Gravitation getriebenes Problem und die Druckkräfte in  $x$ -Richtung müssen nicht eingezeichnet und in der Impulsbilanz berücksichtigt werden.

Mit der Taylor-Reihenentwicklung am Entwicklungspunkt mit den Koordinaten  $(x, y)$ , welcher als Punkt in der obigen Skizze gekennzeichnet ist, gilt:

$$\tau(y + dy) = \tau(y) + d\tau = \tau(y) + \frac{d\tau}{dy} dy$$

Somit ergibt sich für die Impulsbilanz am differentiellen Element:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz + \tau(y) dx dz - \left[ \tau(y) + \frac{d\tau}{dy} dy \right] dx dz \\ \Rightarrow 0 &= \rho g \sin(\alpha) dx dy dz - \frac{d\tau}{dy} dx dy dz \\ \Rightarrow 0 &= \left[ \rho g \sin(\alpha) - \frac{d\tau}{dy} \right] dx dy dz \quad \text{wobei } dx dy dz \neq 0 \\ \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} &= \rho g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

b) 1. unbestimmte Integration nach  $y$  mit  $\rho g \sin(\alpha) = \text{const}$ :

$$\tau(y) = \rho g \sin(\alpha) y + C_1$$

1. Randbedingung: Freie Oberfläche, also Schubspannungsfreiheit

$$\tau(y = d) = 0 \Rightarrow C_1 = -\rho g \sin(\alpha) d$$

Damit ergibt sich:

$$\tau(y) = \rho g \sin(\alpha)(y - d)$$

Mit dem gegebenen mechanischen Stoffmodell eines nicht-newtonsches Fluids, d.h.  $\tau = -K \sqrt{\frac{du}{dy}}$ , folgt:

$$\begin{aligned} -K \sqrt{\frac{du}{dy}} &= \rho g \sin(\alpha)(y - d) \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{du}{dy}} &= -\frac{\rho g}{K} \sin(\alpha)(y - d) \quad \text{mit } \frac{du}{dy} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{du}{dy} &= \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 (y - d)^2 \\ \Rightarrow \frac{du}{dy} &= \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 (y^2 - 2dy + d^2) \geq 0 \end{aligned}$$

2. unbestimmte Integration nach  $y$ :

$$\Rightarrow u(y) = \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 \left( \frac{y^3}{3} - dy^2 + d^2 y \right) + C_2$$

2. Randbedingung: Wandhaftung

$$u(y = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Insgesamt ergibt sich dadurch für das Geschwindigkeitsfeld:

$$\Rightarrow u(y) = \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 \left( \frac{y^3}{3} - dy^2 + d^2 y \right)$$

c) Definition des Volumenstroms und Einsetzen von  $\vec{v} = u(y)\vec{e}_x$  aus c) mit  $B = \text{const}$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_A u(y) \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} dA = \int_0^d \int_0^B u(y) dy dz = B \int_0^d u(y) dy \\ \Rightarrow \frac{\dot{V}}{B} &= \int_0^d u(y) dy \\ \Rightarrow \frac{\dot{V}}{B} &= \left[ \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 \left( \frac{y^4}{12} - d \frac{y^3}{3} + d^2 \frac{y^2}{2} \right) \right]_0^d \\ \Rightarrow \frac{\dot{V}}{B} &= \frac{d^4}{4} \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich zu:

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_0^d u(y) dy = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{Bd} = \frac{d^3}{4} \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 \geq 0$$

Die maximale Geschwindigkeit ist an der schubspannungsfreien Oberfläche vorzufinden:

$$\begin{aligned}u_{\max} &= u(y = d) = \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2 \left( \frac{d^3}{3} - dd^2 + d^2d \right) \geq 0 \\ \Rightarrow u_{\max} &= \frac{d^3}{3} \left( \frac{\rho g}{K} \sin(\alpha) \right)^2\end{aligned}$$

d) Mit dem gegebenen mechanischen Stoffmodell für die Schubspannungsverteilung kann die Art des nicht-newtonschen Fluids wie folgt bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\tau &= -K \sqrt{\frac{du}{dy}} \quad \text{für } \frac{du}{dy} \geq 0 \\ &= -K \left( \frac{du}{dy} \right)^{\frac{1}{2}} = -K \left( \frac{du}{dy} \right)^{-\frac{1}{2}+1} = -K \left( \frac{du}{dy} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{du}{dy} \right)^1 \\ &= -\frac{K}{\sqrt{\frac{du}{dy}}} \frac{du}{dy} \stackrel{!}{=} -\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad \text{im ausgebildeten laminaren inkompressiblen Fall } \dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \\ \Rightarrow \eta(\dot{\gamma}) &= \frac{K}{\sqrt{\dot{\gamma}}} \quad \text{mittels Koeffizientenvergleich } \Rightarrow \dot{\gamma} \uparrow \Rightarrow \eta \downarrow\end{aligned}$$

Die Viskosität  $\eta(\dot{\gamma})$  nimmt mit steigender Schergeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$  ab, so dass es sich um ein scherverdünnendes bzw. strukturviskoses bzw. pseudoplastisches Fluid handelt. Beispiele dafür, die nicht gefordert sind, sind Blut, nicht-tropfende Wandfarbe, viele Polymerlösungen / Thermoplasten.

## 6. Aufgabe

a) Der Turbulenzgrad  $Tu$  ist durch folgende Gleichung definiert:

$$Tu = \frac{1}{|\vec{v}_\infty|} \sqrt{\frac{1}{3} \overline{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}}$$
$$\Rightarrow Tu = \frac{1}{u_\infty} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} \quad \text{im kartesischen Fall mit } |\vec{v}_\infty| = u_\infty$$

Der Turbulenzgrad ist ein dimensionsloses Maß, mit dem die Güte der Anströmung z.B. im Windkanal hinsichtlich der Turbulenz (in alle drei Raumrichtungen) beschrieben werden kann. Je kleiner der Turbulenzgrad, desto turbulenzärmer die Strömung. Dabei stellt  $u_\infty$  den Betrag der Geschwindigkeit der ungestörten Anströmung und  $(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$  ein Maß für die massenspezifische turbulente kinetische Energie dar.

Hinweis: Der Turbulenzgrad beträgt bei technischen Strömungen häufig  $Tu = 0.001 \dots 0.01$  und bei turbulenzarmen Windkanälen  $Tu \leq 0.00005$ .

Im Spezialfall isotroper Turbulenz gilt  $u' = v' = w'$  und somit folgt für den Turbulenzgrad:

$$\Rightarrow Tu = \frac{1}{u_\infty} \sqrt{\overline{u'^2}}$$

b) Stromlinien-Differentialgleichung in kartesischen Koordinaten mit  $dx_S, u(x_S, y_S|t) \neq 0$ :

$$u dy_S = v dx_S$$
$$\Rightarrow \frac{dy_S}{dx_S} = \frac{v(x_S, y_S|t)}{u(x_S, y_S|t)}$$

Einsetzen des gegebenen Strömungsfeldes  $u(x_S, y_S|t) = u = \text{const}$  und  $v(x_S, y_S|t) = atx$  liefert:

$$\Rightarrow \frac{dy_S}{dx_S} = \frac{atx_S}{u}$$

Separation der Variablen und unbestimmte Integration führt mit  $a = \text{const}, u = \text{const}$  zu:

$$\Rightarrow \int dy_S = \int \frac{atx_S}{u} dx_S + C(t)$$
$$\Rightarrow y_S = \frac{at}{u} \frac{x_S^2}{2} + C(t)$$
$$\Rightarrow y_S = \frac{at}{2u} x_S^2 + C(t)$$

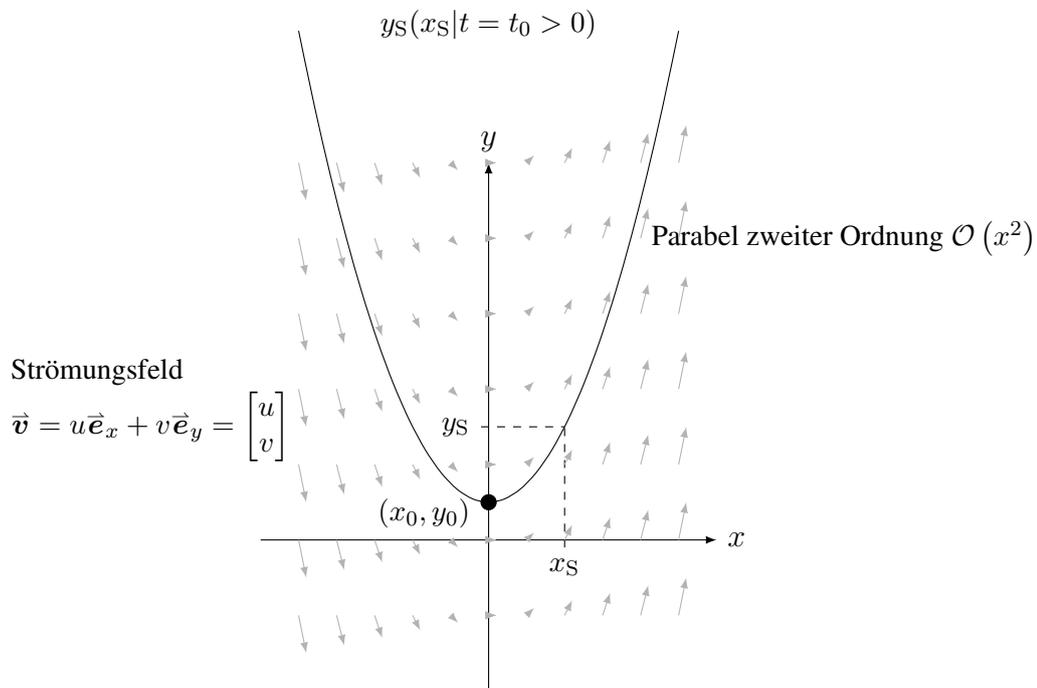
Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}
 y_S(x_S = x_0 = 0 | t = t_0 > 0) &\stackrel{!}{=} y_0 \\
 \Rightarrow \frac{at_0}{2u} \overset{0}{\cancel{y_0}} + C(t) &= y_0 \\
 \Rightarrow C(t) &= y_0 = \text{const}_t
 \end{aligned}$$

Somit:

$$\Rightarrow y_S(x_S | t) = \frac{at}{2u} x_S^2 + y_0$$

Die Stromlinie  $y_S(x_S | t = t_0 > 0)$  durch  $(x_0, y_0)$  bei  $t = t_0 > 0$  beschreibt eine Parabel in kartesischen Koordinaten, wie in der nachfolgenden Skizze mit  $a, u, y_0 > 0$  gezeigt:



Hinweis: Die Skizze des Strömungsfeldes dient rein der verständlichen Visualisierung und wird nicht in der Aufgabe gefordert.

- c) Die qualitative Interpretation des Impulsmomentensatzes (Drehimpulsbilanz) ist im Nachfolgenden für jeden der vier Summanden gegeben:

Lokale Änderung des Drehimpulses im Kontrollvolumen  $V(t)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV$$

Konvektive Drehimpulsflüsse über die Kontrollfläche  $\partial V(t)$  des Kontrollvolumens  $V(t)$  mit  $\vec{v}_{\partial V}$  als die lokale Geschwindigkeit der Kontrollfläche:

$$\oint_{\partial V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{v} [(\vec{v} - \vec{v}_{\partial V}) \cdot d\vec{A}]$$

Drehmomente auf Grund der angreifenden Volumenkräfte  $\vec{f}$  im Kontrollvolumen  $V(t)$  :

$$\int_{V(t)} \vec{r} \times \vec{f} dV$$

Drehmomente auf Grund der angreifenden Oberflächenkräfte  $\vec{\sigma}$  auf der Kontrollfläche  $\partial V(t)$  des Kontrollvolumens  $V(t)$ :

$$\oint_{\partial V(t)} \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{A})$$

Die Drehmomente der Volumenkräfte und Oberflächenkräfte ergeben in Summe das Gesamtdrehmoment, welches auf die Materie im Kontrollvolumen wirkt.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \int_{V(t)} \vec{r} \times \vec{f} dV + \oint_{\partial V(t)} \vec{r} \times (\vec{\sigma} \cdot d\vec{A})$$

Im zyklisch stationären Fall im Sinne einer zeitlichen Mittelung über eine problemspezifische Periodendauer  $T$ ,  $\overline{(\cdot)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\cdot) dt$ , fällt die lokale Änderung des Drehimpulses im Kontrollvolumen zu Null weg: Hinweis: Ebenso fallen die Scheinvolumenkräfte, wie Zentripetalkräfte, auf Grund eines mitrotierenden Bezugssystems im zeitlichen Mittel weg.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV} = 0$$