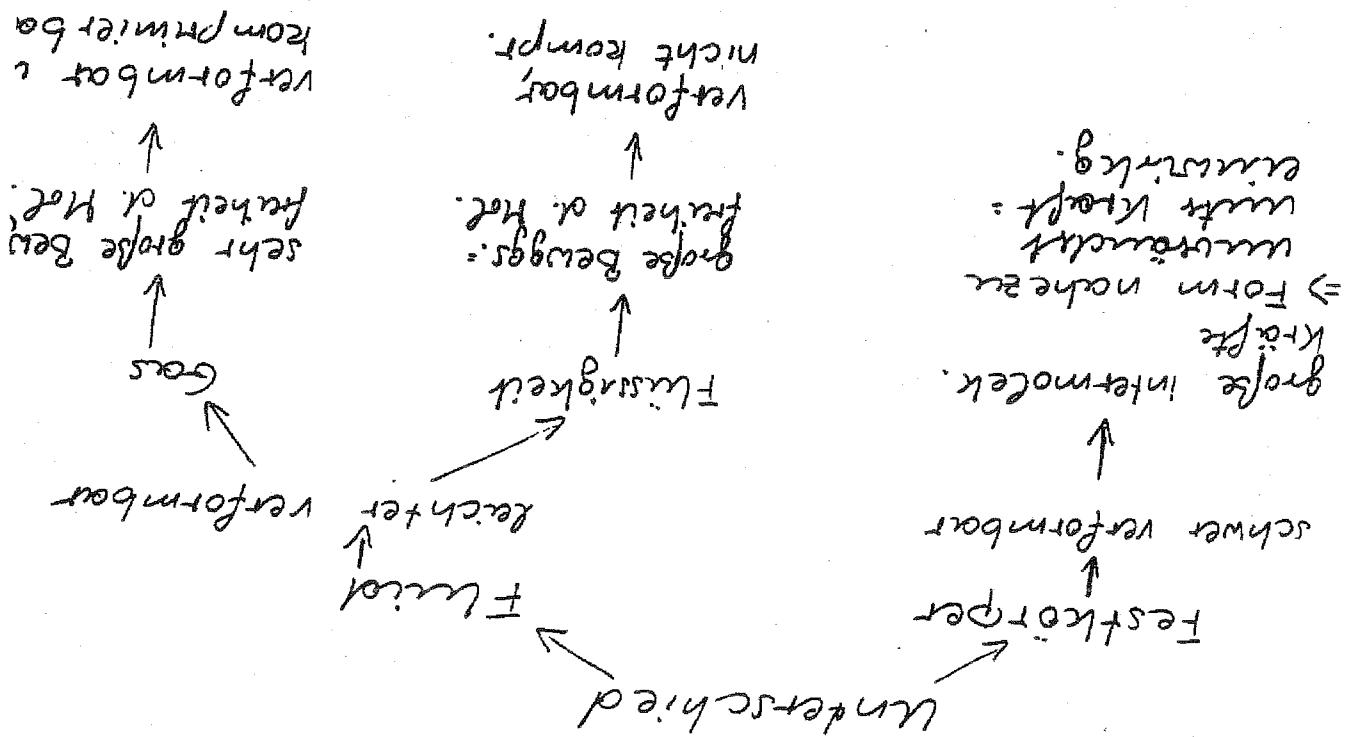


Festkörper, Flüssigkeiten, Gase



Verformung durch äußere Kraft

Fluid: Stoff, der sich kontinuierlich verformt, wobei d. Schubkraft beliebig klein sein kann

Festkörper: Stoff, der sich nicht kontinuierlich verformt → fließt nicht

Materialien, die weder reine Festkörper noch reine Fluide sind
⇒ Rheologie

Bewegung der Moleküle $\Rightarrow$

Mechanik d. Fluide

JEDOCH: Interesse am durchschnittl. Verhalten

gewähltes Mittelvolumen

- $\ll$ Dimension d. Probl.

- $\gg$ Abstand d. Molek.

$\Rightarrow$ Var. im Strömungsfeld entspricht dem Durchschnittswert d. Mol. im Vol.

Annahme: sehr viele im Vol.

$\rightarrow$ kontinuierl. Verteilg. d. Charakteristika

$\Rightarrow$ Kontinuumsmechanik

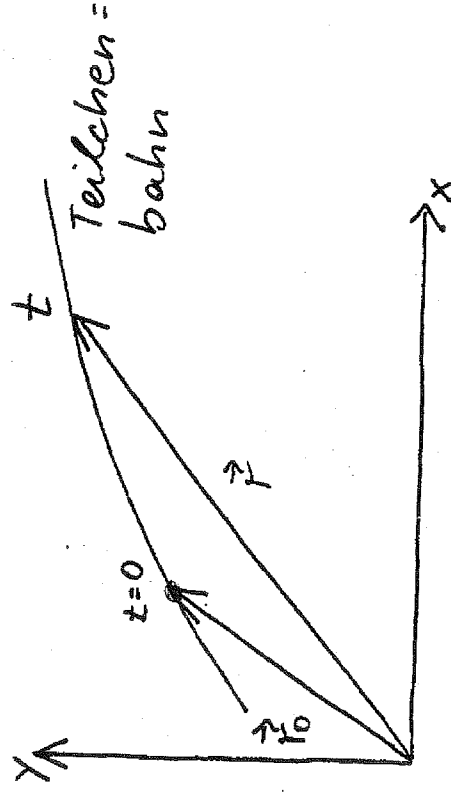
Ablauf d. Bewegung, später Ursache d. Bewegung

Eulersche und Lagrange

Strömungsbeschreibung

Lagrange: Bewegg. d. einzelnen Partikels bestimmt d. Fluideigenschaften

unabhgg. Var. $t, \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = x_0 \vec{e}_1 + y_0 \vec{e}_2 + z_0 \vec{e}_3$



Lage d. Teilchens $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$
 Störgr. F gegeben durch $F(\vec{r}_0, t)$

Euler: $\rightarrow$ Feldkonzept

Zeitpunkt. $t = t_c = \text{konst}$

Feldwert $P = P(x, y, z)$

allgemein gilt für eine Var. F

$$F(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$\Rightarrow$ z. Bsp. f. die Geschw. $\vec{v}$

sofern $u(x, y, z, t)$

$v(x, y, z, t)$

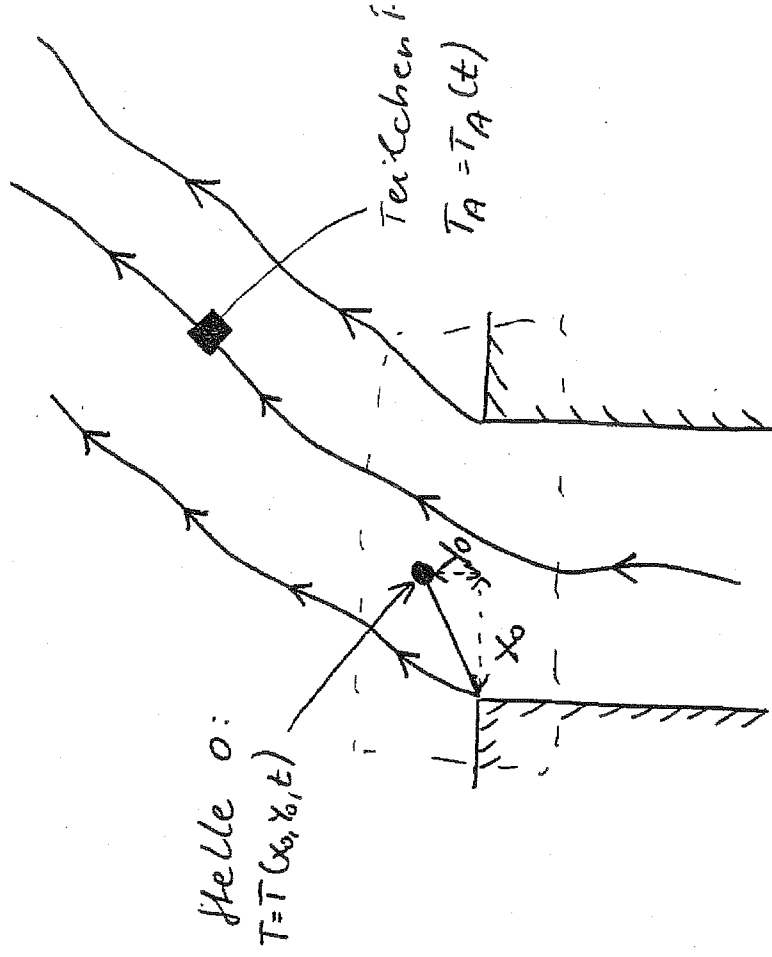
$w(x, y, z, t)$

Bekannt,

dann auch

$$\vec{v} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3$$

Unterschied Euler - Lagrange
 Bsp.: Kaminrauch



Temp. meßgerät in $\sigma \rightarrow T(x_0, y_0, z_0, t)$
mit vielen Meßgeräten $\rightarrow T(x, y, z, t)$
Temp. eines Teilchens abhgg. v. t ist
unbekannt

'agrange Methode:

Temp. meßgerät sitzt auf $A \rightarrow T_A = T_A(t)$
 $T_A = f(\text{Ort})$ unbekannt, sofern
 $\text{Ort} = g(t)$ unbestimmt

In der Fluidmechanik wird i. d.
auf d. Euler Konzept zurück-
gegriffen.

Stationäre und instationäre Strömungen

instationär bzw. zeitabhängig:

$$\text{Variable} = f(x, y, z, t)$$

stationär bzw. zeitunabhängig:

$$\text{Variable} = f(x, y, z) \neq g(t)$$

instat. Strömungen: stat.-u. au-
fahrvorgänge

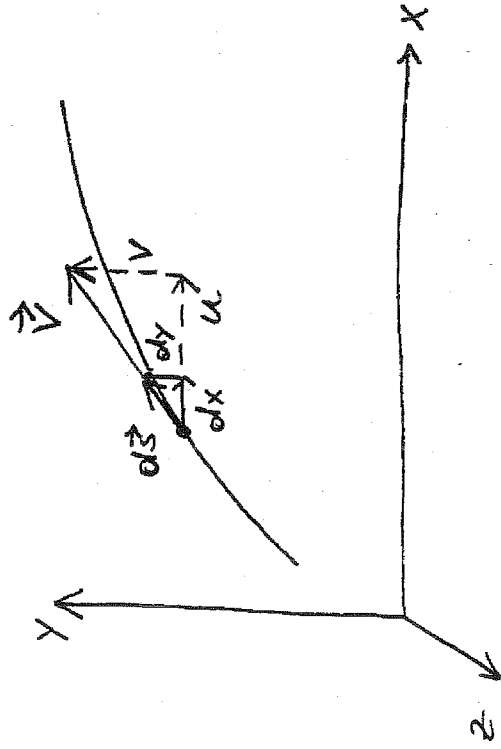
quasistationär bzw. "wie stationär"

Ändg. aufgrund von t sehr langsam

Bemerkung: Beschleunigg. aufgrund
von $A = f(x, y, z)$ in stat. Strömungen

stromlinien, stromröhre, stromlinie

stromlinie: kurve, die tangential zum Geschwindigkeitsvektorfeld verläuft



$$d\vec{S} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

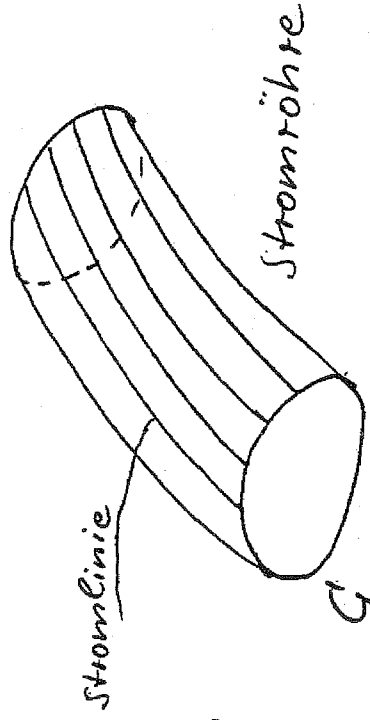
$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$\text{es gilt } \vec{V} \times d\vec{S} = \vec{0}$$

$$\text{bzw. } \left| \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \right|$$

entlang d. stromlinie

stromröhre: stromlinien, die durch eine geschlossenen kurve G gehen



stromfaden: stromröhre mit infinitesimal. Querschnitt

Bahnlinie: Trajektorie eines einzelnen Partikels über der Zeit

Mat. Ström.: Bahnlinie = stromlinie

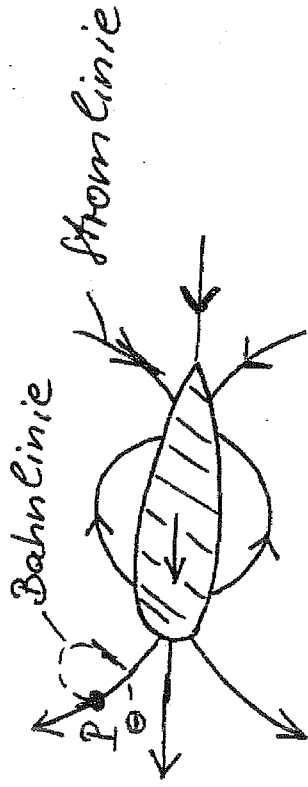
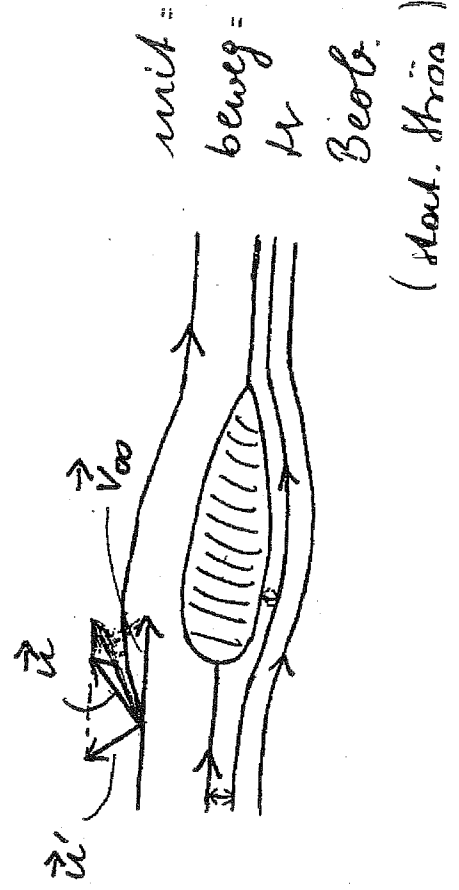
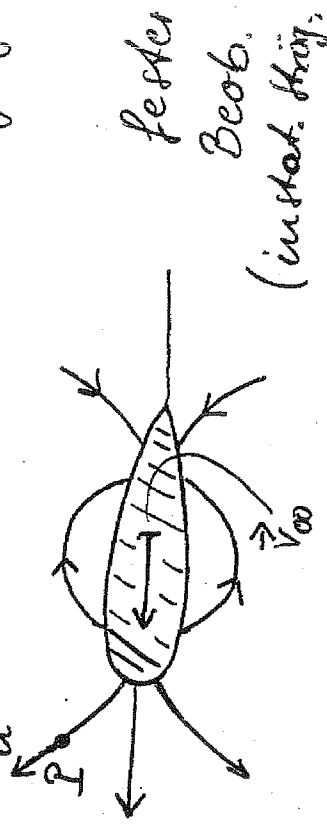
instat. Ström.: Bahnlinie $\neq$ stromlinie

Rauchlinie: Linie d. Fluidpartikel, die denselben Ort passiert haben.

stat. Strömung: Stromlinie =
Bahnlinie =
Rauchlinie

Bezugssystem

stat. od. instat. kann f (Bezugssyst.)



fester Beobachter $\rightarrow$ instationäre Strömung

Stromlinie: Momentanbahnlinie

Bahnlinie: Verlauf über d. Zeit

Visualisierung v. Strom- u. Bahnlinie =
in 2. Bsp. mittels reflekt. Material
auf d. Fluidoberfläche.

Wichtig: Stromlinien haben
keinen Knick.

Grundgleichungen strömender Fluide

Kontrollvolumen und Kontrollsystem

Fundamentale physikal. Gesetze
auf Kontrollsystr. (KS) und
Kontrollvol. (KV) anwendbar

KS: Sammlung einer Substanz
gleichbleibender Identität

KV: festgelegtes Volumen im
Raum $\rightarrow$ geometr. Größe

I. a. ist man in der Fluidmechanik u. a. an Kräften interessiert, die von d. Ström. auf

Propeller, Flugzeuge, Autos etc.
wirken.

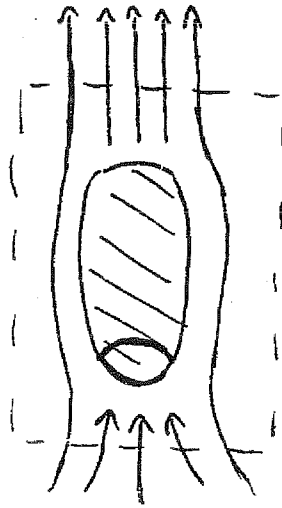
Veränderungen des Systems
stehen nicht im Vordergrund
der Analyse.

$\Rightarrow$ I. a. Analyse mittels KV!

typische KV:

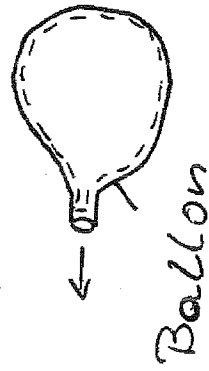


ruhend
festes KV



ruhend oder
bewegtes KV;

 KV bei t_1 ,  KV bei $t_1 + \Delta t$



verformen =
des Kon =
troll vol.

Grundgesetze der Strömungs-
mechanik sind ursprünglich
für KS formuliert

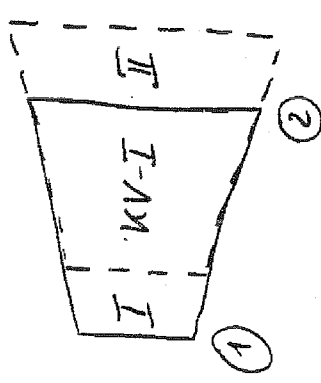
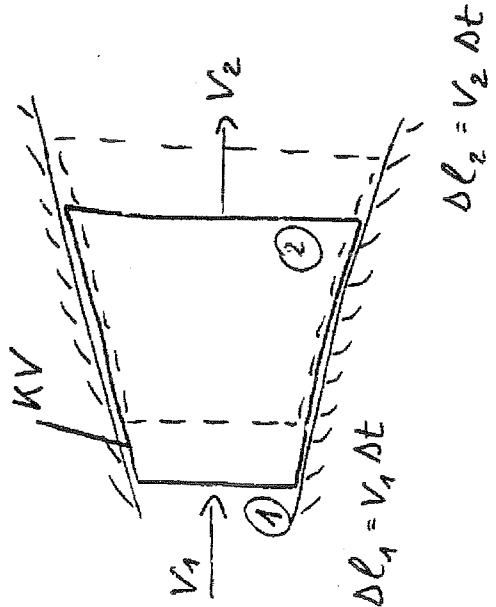
→ Masse eines Systems
ist konst.

→ zeitl. Ändg. d. Imp. eine
Syst. ist gleich d. ΣF auf
das Syst.

⇒ Reynoldssche Transport-
theoreme notwendig, um
von der KS-Form auf die
KV-Form zu gelangen.

von unten nach oben ...

KV in einem Rohr :



Zeitpht. t : Syst. enthält Fluid im KV
 Zeitpht. $t + \Delta t$: Syst. besteht aus $(KV - I) + II$

B : beliebige Größe d. Systems
 (z.B. m)

Zeitpht. t :

$$B_{sys}(t) = B_{kv}(t)$$

Zeitpht. $t + \Delta t$:

$$B_{sys}(t + \Delta t) = B_{kv}(t + \Delta t) - B_I(t + \Delta t) + B_{II}(t + \Delta t)$$

=> zeitl. Änderung. $\Delta B_{sys} / \Delta t$

$$\Delta B_{sys} / \Delta t = \frac{B_{sys}(t + \Delta t) - B_{sys}(t)}{\Delta t}$$

= $B_{sys}(t)$

$$= \frac{B_{kv}(t + \Delta t) - B_{kv}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{B_I(t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{B_{II}(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dB_{sys}}{dt}$$

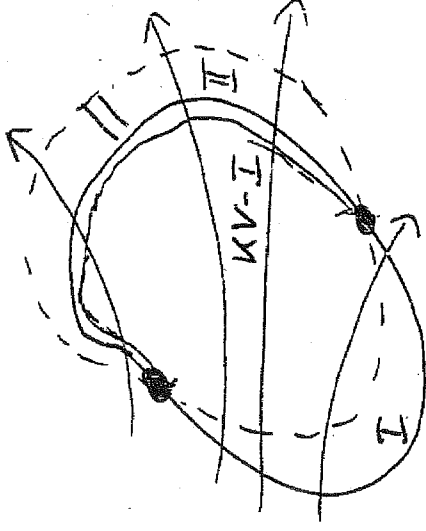
$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta B_{sys}}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{\partial B_{KV} + \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in}}{\partial t}$$

Zshg. zwischen d. zeitl. Änderungsrate von B für das KS und d. KV.

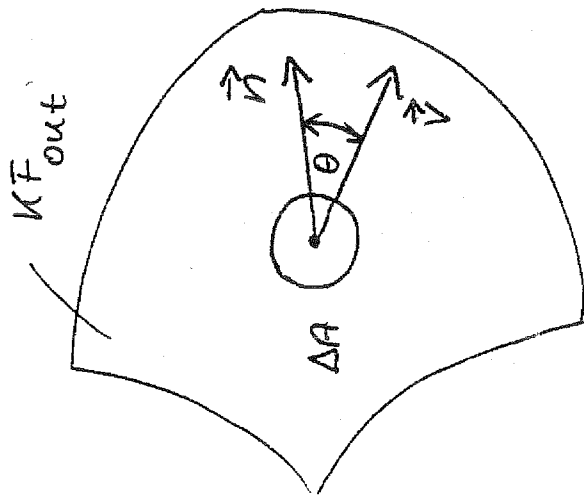
$\dot{B}_{out}, \dot{B}_{in}$: Nettostrom von B aus, in d. KV.

allgemeinere Darstellg.



— feste KV-tr. fl. und Syst. gr. b.
 --- Syst. gr. bei $t + \Delta t$

Bestimmung v. $\dot{B}_{out}$ mittels
 Integration über ΔA von KF_{out} .
 KF_{out} : trennt Gebiet II und KV



$$\dot{B}_{out} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{K_{out}} b \, dV}{\Delta t} \right) = \int_{K_{out}} b \, \|\vec{v}\| \cos \theta \, dA$$

Einheits-

$\vec{n}$: normalen=
vektor

θ : Winkel
zw. Geschw.
vekt. $\vec{v}$ und
 $\vec{n}$

Integration über K_{out} liefert

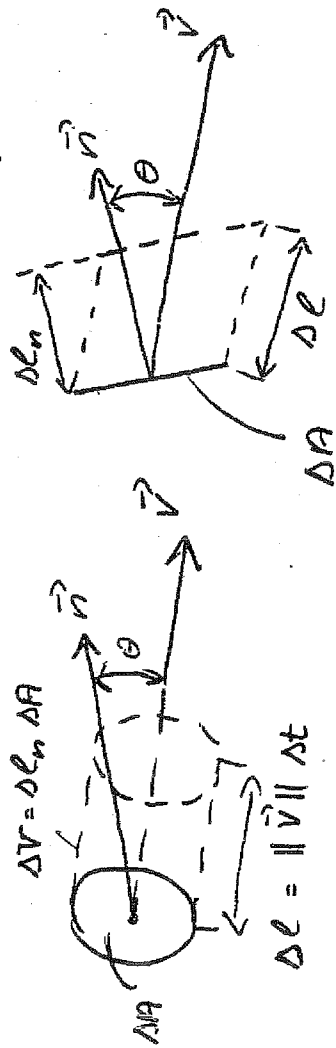
$$\dot{B}_{out} = \int_{K_{out}} d\dot{B}_{out} = \int_{K_{out}} b \, \|\vec{v}\| \cos \theta \, dA$$

$$\dot{B}_{out} = \int_{K_{out}} b \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

$$B = m b$$

Fluß von B über ΔA in Δt

$$\Delta B_{out} = b \, \Delta V = b \, \Delta \left(\|\vec{v}\| \cos \theta \, \Delta t \right) \Delta A$$



Einstromung ebenso

$$\dot{B}_{in} = - \int_{K_{in}} b \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

Umdruck S. 18

$$\dot{B}_{out} - \dot{B}_{in} = \int_{KF_{out}} \rho \vec{b} \cdot \vec{n} dA -$$

$$\left[- \int_{KF_{in}} \rho \vec{b} \cdot \vec{n} dA \right]$$

$$= \int_{KF} \rho \vec{b} \cdot \vec{n} dA$$

Mit $\dot{B}_{KV} = \int_{KV} \rho \vec{b} dV$ folgt

$$\frac{d\dot{B}_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \vec{b} dV + \int_{KF} \rho \vec{b} \cdot \vec{n} dA$$

Reynoldssches Transporttheorem
für ein ruhendes, unverform-
bares Kontrollvolumen.

Erhaltung der Masse

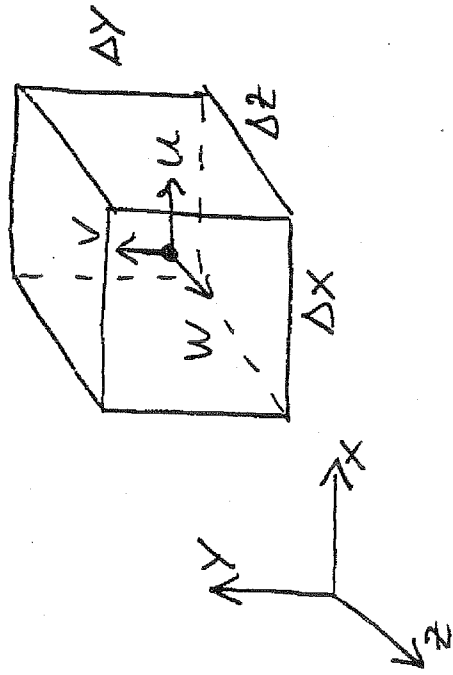
Die Masse des Systems bleibt
bei Bewegung durch das
Strömungsfeld konstant.

$$B = m b, \quad \text{für } b = 1$$

$$\frac{d\dot{m}_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho dV + \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

integrale Form

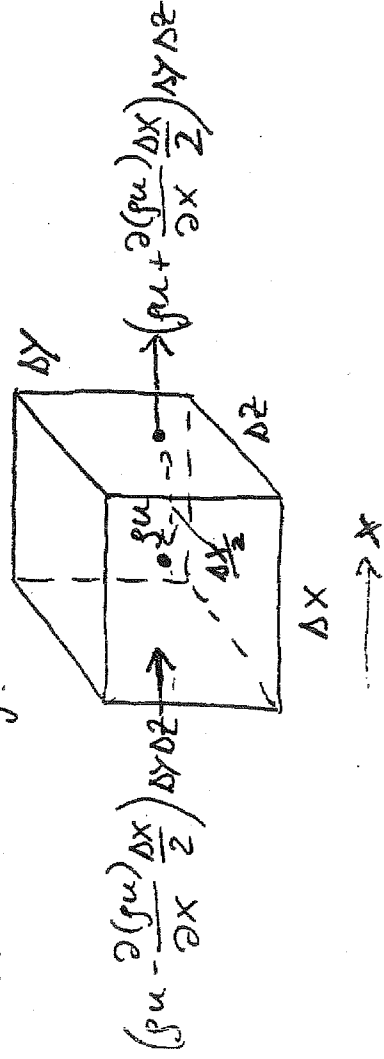
differentielle Form über
Gaußschen Satz oder am
Element



zeitl. lokale Massenänderung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Massenfluß über d. Oberfläche
d. Elements:
x-Richtung.



Nettomassenfluß in x-Richtung

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

$$= \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \leftarrow$$

in y-, z-Richtung

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \leftarrow$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \leftarrow$$

$\Rightarrow$ differentielle Form d. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

mit

$$\vec{\nabla}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$$

mit

lok.

konvek.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla s$$

folgt $\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla s = 0$

$$\frac{ds}{dt} + s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

bzw

$$\frac{ds}{dt} + s \frac{\vec{V} \cdot \nabla}{\text{div } V} = 0$$

Sonderfälle:

• stat. Ström. $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$

$$\vec{V} \cdot \nabla s = \frac{\partial(su)}{\partial x} + \frac{\partial(sv)}{\partial y} + \frac{\partial(sw)}{\partial z} = 0$$

• inkompressibles Fluid

s: konst.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\text{div } \vec{V} = \vec{V} \cdot \nabla = 0$$

Erhaltung des Impulses

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

$\vec{F}$: auf d. Flächenelement

wirkende resultierende Kraft

$$\vec{I} = \int_{sys} \vec{V} dm : \text{Impuls}$$

Anwendung auf ein differenzierbares Massesystem

$$\Delta \vec{F} = \frac{d(\vec{V} \Delta m)}{dt}$$

$\Delta m_{sys} = \text{konstant}$

$$\Delta \vec{F} = \Delta m \frac{d\vec{V}}{dt} = \Delta m \vec{a}$$

$\Delta \vec{F}$: Oberflächen- und Volumenkräfte

Volumenkraft:

Gewichtskraft
maßgeblich

in kartesischen Koordinaten

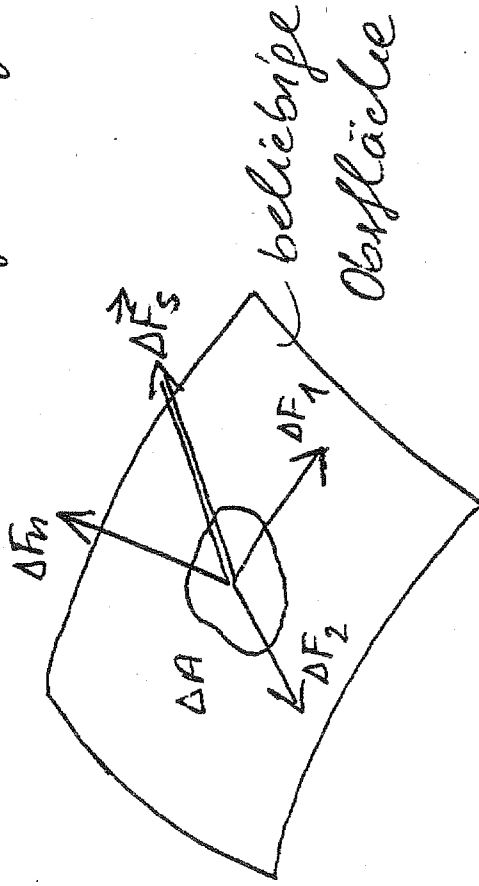
$$\Delta F_{bx} = \Delta m g_x$$

$$\Delta F_{by} = \Delta m g_y$$

$$\Delta F_{bz} = \Delta m g_z$$

Oberflächenkraft:

Element $\leftrightarrow$ Umgebungs



$$\Delta F_1 \perp \Delta F_2, \quad \Delta F_n \perp \Delta A$$

Normalspannung:

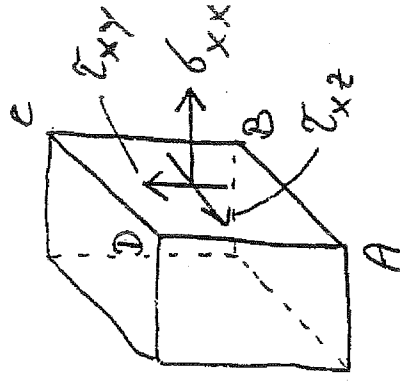
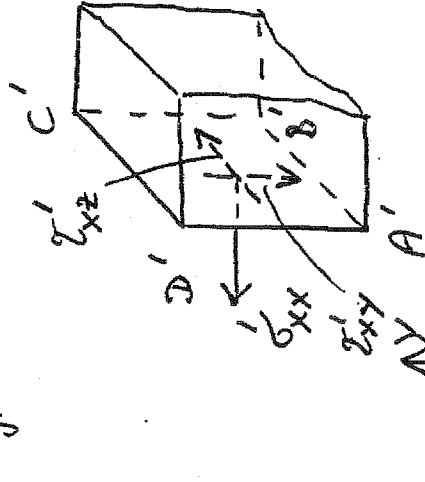
$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

Schubspannung:

$$\sigma_1 = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_1}{\Delta A}$$

$$\sigma_2 = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_2}{\Delta A}$$

die übliche Zeichenkonvention
gilt



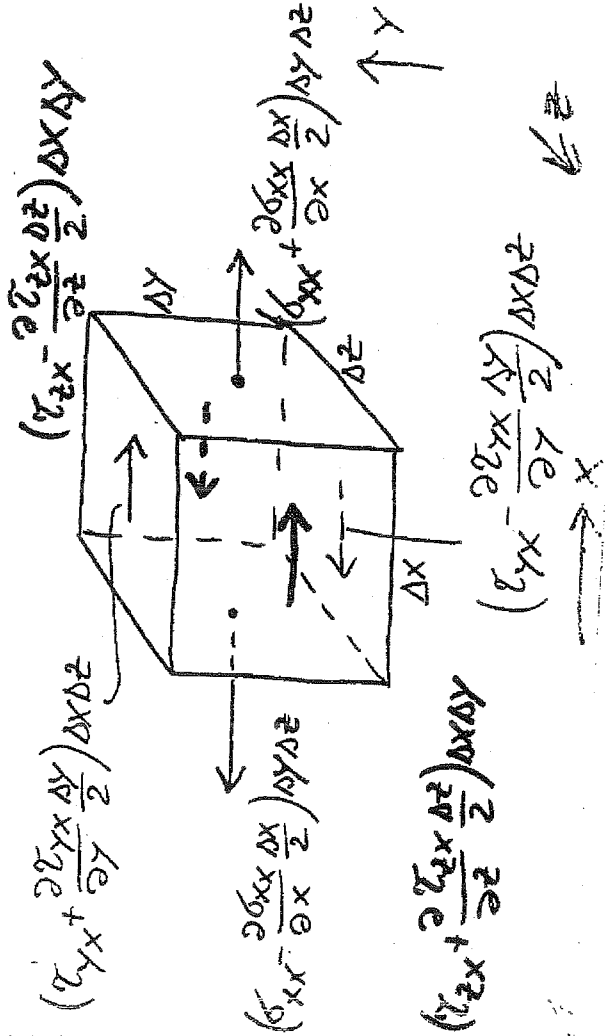
Bedeutung d. Indices:

S_{ij} : i Richtung d. Normalen
d. Ebene

j Richtung d. Spannung

Spannungen auf 3 orthogonalen, durch einen Punkt gelegten Ebenen definieren den Spannungszustand eindeutig.

Oberflächenkräfte (nicht vollständig):



Summation liefert d. Komp. der resultierenden Oberflächenkraft

$$\Delta \vec{F}_S = \Delta F_{Sx} \vec{i} + \Delta F_{Sy} \vec{j} + \Delta F_{Sz} \vec{k}$$

$$\Delta F_{Sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_{Sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_{Sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Einsetzen in $\Delta \vec{F} = \Delta m \vec{a}$

mit

$$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_S + \Delta \vec{F}_b$$

$$\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

ergibt

differentielle Form der Impuls-
erhaltung

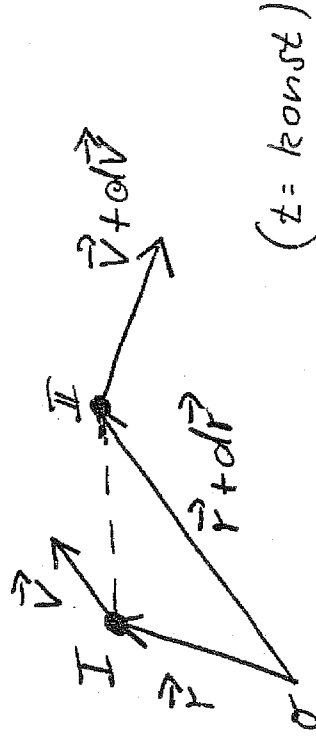
$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\
 & \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\
 & \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Kinematik d. Fluidelemente

Aufgabe: Spannungen durch
Geschw.komp. ausdrücken

Bewegung eines Elements
 $\Rightarrow$ Änderung seiner Lage und sein
 Form

Bestimmung d. Verformung mittel
 d. relativen Bewegg. zwischen 2 Punkt
 I und II



($z = \text{konst}$)

$\vec{r}$: Ortsvektor

$d\vec{V}$: Geschwindigkeitsänderung

dV in Komp. Schreibweise

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

Um den Zusammenhang mit Translation, Rotation, Dehnung und Scherung zu erkennen, wird $d\vec{V}$ ungeschrieben.

$$du = \dot{\epsilon}_x dx + \dot{\epsilon}_{xy} dy + \dot{\epsilon}_{xz} dz + \omega_{zx} dz - \omega_{xy} dy$$

$$dV = \dot{\epsilon}_{yx} dx + \dot{\epsilon}_y dy + \dot{\epsilon}_{yz} dz + \omega_{xy} dx - \omega_{yz} dz$$

$$dW = \dot{\epsilon}_{zx} dx + \dot{\epsilon}_{zy} dy + \dot{\epsilon}_z dz + \omega_{yz} dy - \omega_{zx} dx$$

Die Größen $\dot{\epsilon}_i, \dot{\epsilon}_{ij}, \omega_{ij}$ sind folgendermaßen definiert

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

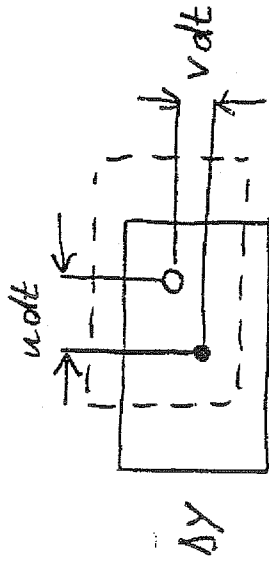
$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

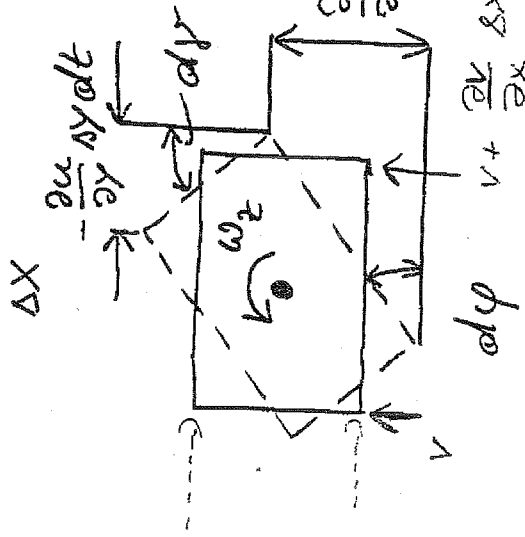
$$\omega_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Bedeutung von $\dot{\epsilon}_i, \dot{\epsilon}_{ij}, \dot{\omega}_{ij}$?

unverformtes Element bewegt sich in der Strömung



Translation



Rotation

$$d\phi = \frac{\partial v}{\partial x} dt = - \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

var (dφ) = dφ

⇒ zeitl. Winkeländerg. $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$
aus d. anith. Mittel

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_{xy}$$

→ Drehung um z-Achse

In 3D stellt man

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \omega_{yz}$$

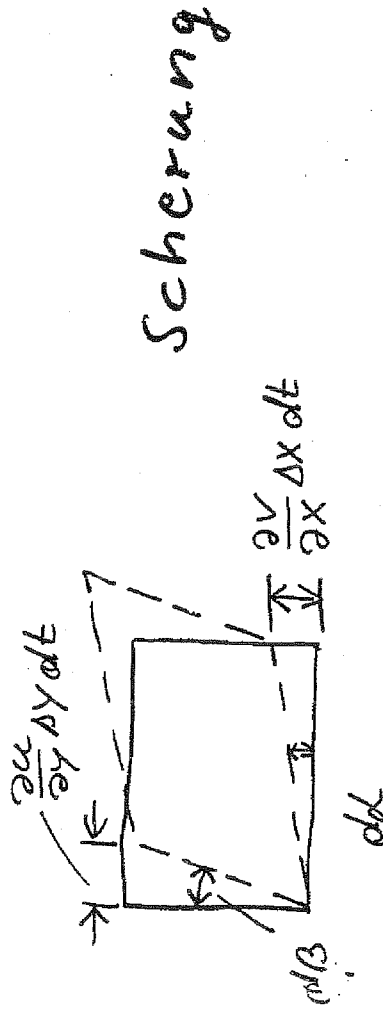
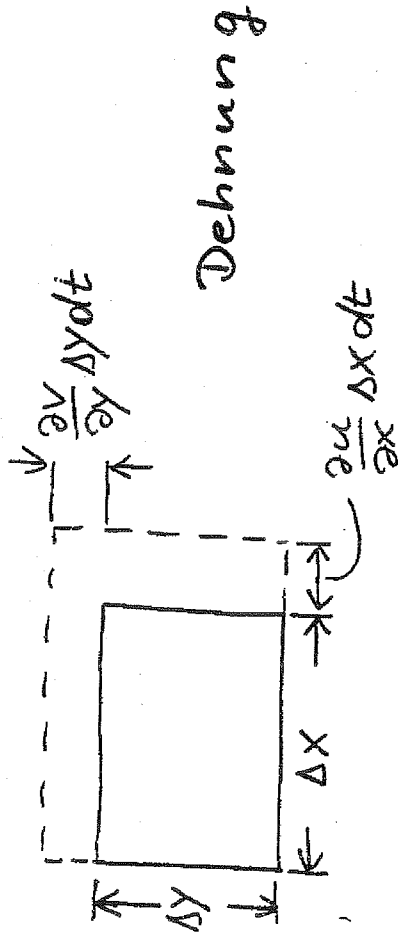
$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \omega_{zx}$$

→ Dreh- oder Wirbelvektor $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

⇒ ω_{ij} -Tens: Rotation d. unv. =
formten Elements

Verformung des Elements



Dehngeschwindigkeit $\hat{=}$ rate
 Dehnungsänderung pro Kantenlänge

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$\hat{=}$ d. Hauptdiag. d. Matrix σ_{ij}

relative Volumenänderung
 (Volumendilatation) $\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt}$

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{1}{\Delta V} \left[\left(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \frac{dt}{dt} \right) \left(\Delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \frac{dt}{dt} \right) \left(\Delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \frac{dt}{dt} \right) - \Delta x \Delta y \Delta z \right] \frac{1}{dt}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v}$$

$\rightarrow$ Konti. glg. f. inkompr. Fluide

Rechteck $\xrightarrow{\text{Scherung}}$ Parallelepiped

$$d\gamma = d\alpha + d\beta$$

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dt}{dt}$$

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$$

gesamte Winkeländerg. pro Zeit.

Scherschwindigkeit $\dot{\gamma}_{ij}$ über arithmet. Mittelung

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Vgl. mit d_{ij} -Matrix:

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} \hat{=} \dot{\gamma}_{ij} - \text{Tenne}$$

$\Rightarrow d_{ij}$ -Matrix enthält Dehnung und Scherung
 $\Rightarrow$ Tensor d. Deformation

Spannungstensor τ_{ij} in der Impulserhaltung;

Zshg. zw. τ_{ij} u. $\dot{\epsilon}_{ij}$ durch Newtonsche Reibungsansatz:

Tang.spgr. $\sim$ Schergeschw.

und mittels Isotropie d. Element

$$\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z \text{ und } \text{div } \vec{v}$$

$\rightarrow$ viskositätsbedgte. Nav. spgr.

$\Rightarrow$ ANSATZ:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta \dot{\epsilon}_x + \lambda \text{div } \vec{v}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\eta \dot{\epsilon}_y + \lambda \text{div } \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \dot{\epsilon}_z + \lambda \text{div } \vec{v}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\eta \dot{\gamma}_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\eta \dot{\gamma}_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 2\eta \dot{\gamma}_{zx}$$

2, 3 neue Proportionalitäts-
faktoren

transponieren d. Norm.- u. Tangen-
tialspg. $\Rightarrow$

Navier-Stokes Gleichungen

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]$$

die Normalspannungen werden
i. a. umformuliert

$$\sigma_{xx} = -p + \eta \left(2 \dot{\epsilon}_x - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\sigma_{yy} = -p + \eta \left(2 \dot{\epsilon}_y - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \eta \left(2 \dot{\epsilon}_z - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

η : dynamische Viskosität

$\hat{\eta} = \lambda + \frac{2}{3} \eta$: Volumenviskosität

Stokesche Hypothese: $\lambda = -\frac{2}{3} \eta$

inkompressible Ström.: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$
 $\Rightarrow$ mittlere Norm. spg. $\bar{\sigma}$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p$$

inkompressible ström, $\rho = \text{konst}$
 $\rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

Vereinfaclg. d. 2. Ableitungen

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right) \\ = \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$\Rightarrow$ Nav.-Stokes Gln. ink. Fluid

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Navier Stokes

Energiegleichung

1. Hauptsatz d. Thermodynamik

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt}$$

Q : Wärme, E : Energie, W : Arbeit

Volumenelement: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

Wärmeleitung n. Fourier:

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = \dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

λ : Wärmeleitfähigkeit

Betrachtg. für d. Fläche $\Delta y \Delta z$ (x-Richtg.)
 aufgenommene Wärme:

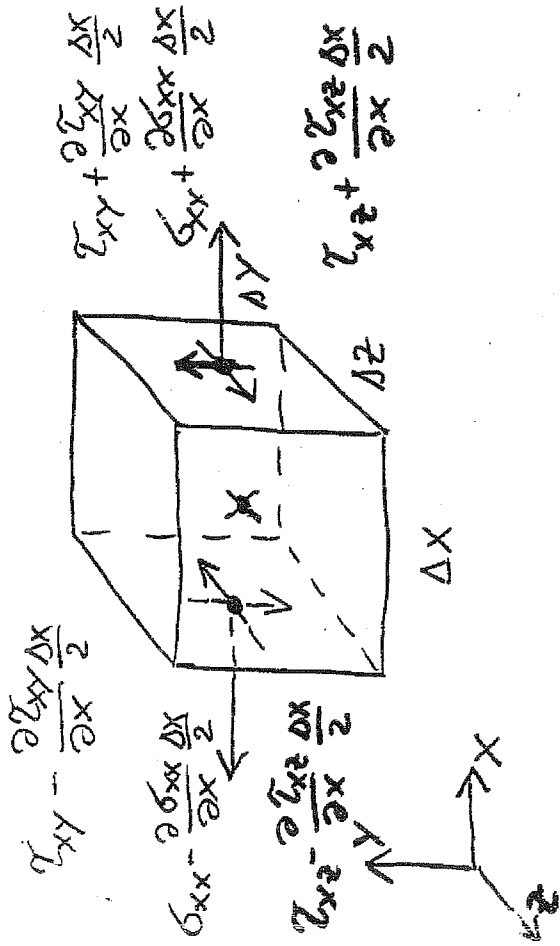
$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

abgegebene Wärme:

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

in der warmen ... u, v, w - und z -Richtung

$$\frac{dQ}{dt} = \Delta V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\}$$



zeitl. Änderung d. Gesamtenergie

$$\frac{dE}{dt} = \int \Delta V \left[\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$

e : massenbezogene innere Energie

Arbeit pro Zeit anhand von σ_{xx}

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\sigma_{xx}}}{dt} &= -\Delta V \Delta z \left[-\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \\ &= -\Delta V \Delta z \left(u \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \\ &= -\Delta V \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx}) \end{aligned}$$

analoge Vorgehensweise für den gesamten Spannungstensor $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\Delta V \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \sigma_{yy} + w \tau_{yz}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \sigma_{zz}) \right] \end{aligned}$$

Mittels Impulserhaltung
(z.B. x-Impuls):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

Umformung d. $\frac{dE}{dt} - u \cdot \frac{dW}{dt}$ - Terme

$$\frac{d(u^2 + v^2 + w^2)}{dt} = 2u \frac{du}{dt} + 2v \frac{dv}{dt} + 2w \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{dE}{dt} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{dW}{dt} = -u \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} - \dots$$

$$\left(\frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt} \right) \frac{1}{\Delta V} = \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} - \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} - \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} - \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} - \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Einführung der Spannungen
erpißt d. Energiegleichung

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v$$

mit Φ für $\dot{q}_v = 0$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 > 0$$

Φ : Dissipationsfktn.

mech. En. $\rightarrow$ therm. En.

Energiegleichung für ideale Gase

$$e = f(T), \quad h = e + \frac{p}{\rho} = f(T)$$

Kalorische Zustandsglgn.

$$de = c_v dT, \quad dh = c_p dT$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{dt}$$

$$= c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right]$$

Kontin. fgl.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \gamma \Phi}$$

Form d. Energiegleichung in CFD - Untersuchungen

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(E+p)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(E+p)] + \frac{\partial}{\partial z} [w(E+p)]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} [u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} - q_x] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz} - q_y] +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz} - q_z]$$

bzw. mit

$$H = h + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}$$

$$\rho H = \rho + \rho \left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) = p + E$$

=>

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w H) = \rho \sigma.$$

Formen der Erhaltungsglgn.

Vektorschreibweise unter Berücksichtigung d. Nabla-Operators

Masse: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$

oder

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

Impuls:

Spannungstensor τ

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx} + p = \eta (2\dot{\epsilon}_x - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V}) + \dot{\epsilon} \operatorname{div} \vec{V}$$

$$\sigma_y = \sigma_{yy} + p$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} + p$$

$\Rightarrow$ Formen d. Navier-Stokes Glgn.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

oder

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

mit $\vec{V} \vec{V}$

$$\vec{V} \vec{V} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix}$$

inkompressibles Fluid mit $\eta = \text{konst}$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{V}$$

+ stationär

$$\rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{V}$$

Übung 2

$E = \int (e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}) : \text{Gesamtenergie}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (E \vec{v}) = \int \vec{g} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\tau \cdot \vec{v})$$

plus Kontiglg.

$$\frac{d}{dt} (e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}) = \int \vec{g} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\tau \cdot \vec{v})$$

$H = \frac{P + E}{S} : \text{Gesamtenthalpie}$

$$\int \frac{dH}{dt} = \int \vec{g} \cdot \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{\nabla} \cdot (\tau \cdot \vec{v}), \text{ denn}$$

$$\frac{d}{dt} (e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}) = \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{S} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) \right)$$

$e : \text{innere Energie}$

$$\int \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

oder

$$\begin{aligned} \int \vec{\nabla} \vec{v} = & \int_x \frac{\partial u}{\partial x} + \int_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \int_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \int_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_y \frac{\partial v}{\partial y} + \int_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \int_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} + \int_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} + \int_z \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} \right) \int_{xz} \frac{\partial x}{\partial x} + \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial y} \right) \int_{yz} \frac{\partial y}{\partial y} + \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial z} \right) \int_{z} \frac{\partial z}{\partial z} \\ & = 2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$h : \text{innere Enthalpie}$

$$\int \frac{dh}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

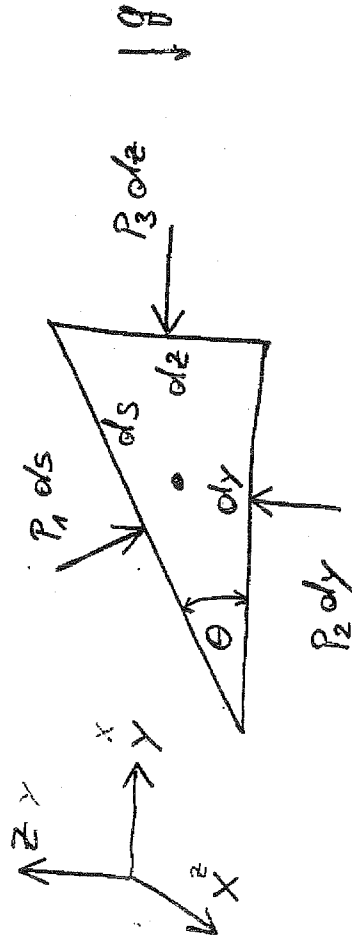
bzw. bei idealem Gas

$$\int c_p \frac{dT}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

HYDROSTATIK

ruhenndes Fluid $\rightarrow$ keine

Tangential-
spannungen



Kräftegleichgewicht für Oberflächen-
und Gewichtskraft

y-Richtung:

$$P_1 ds \sin \theta - P_3 dz = 0$$

z-Richtung:

$$-P_1 ds \cos \theta + P_2 dy - \frac{1}{2} \rho g dy dz = 0$$

$$dz = ds \sin \theta$$

$$\Rightarrow P_1 = P_3$$

$$dy = ds \cos \theta$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 - \frac{1}{2} \rho g dz = 0$$

Volumen $\rightarrow$ Punkt :

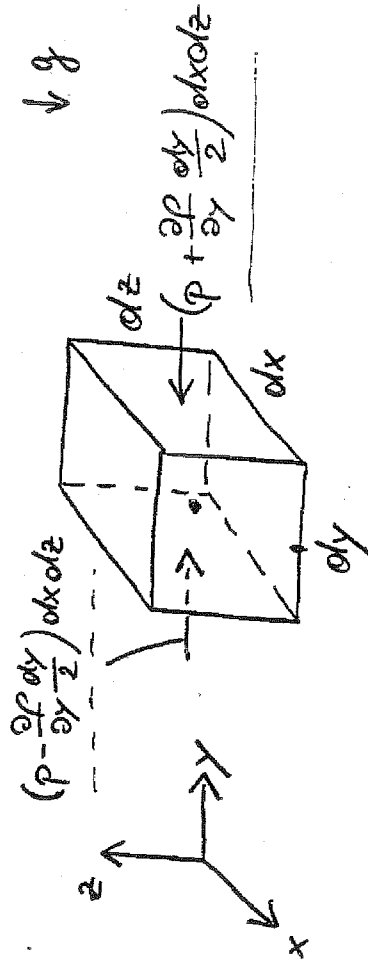
$$dz \rightarrow 0 \Rightarrow P_1 = P_2$$

$\Rightarrow$ ruhend. Fluid, in einem Pkt.

Druck unabhängig v. d. Richtg.

$\Rightarrow$ Druck ist eine skalare Größe

räuml. Verteilg. d. Druckes



Kräftegleichgew. in x- u. y-Richtung:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = 0$$

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad p = f(x, y)$$

in z-Richtung:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$$

$$- \rho g dx dy dz = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

$\rho = \text{konst.}, g = \text{konst.}$

$$p = p_0 - \rho g z$$

mit $p_0 = p(z=0)$

$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g z = p_0 = \text{Konstante}}$$

hydrostatische Grundgleichung

hydrostatische Grundgleichung
für beliebige Beschleunigungsfele.

Oberflächenkräfte in x, y, z-Richt.

$$dF_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

$$dF_y = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

$$dF_z = - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_S = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} \\ = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz$$

$$d\vec{F}_S = - \vec{\nabla} p dx dy dz$$

Newton (2. Gesetz)

$$\sum d\vec{F} = dm \vec{a}$$

$$d\vec{F}_S - dG \vec{k} = dm \vec{a}$$

$$- \vec{\nabla} p dx dy dz - \rho g dx dy dz \vec{k} = \rho dx dy dz \vec{a}$$

$$\boxed{- \vec{\nabla} p - \rho g \vec{k} = \rho \vec{a}}$$

allg. Bewegungsgl. ohne Tang. spg.

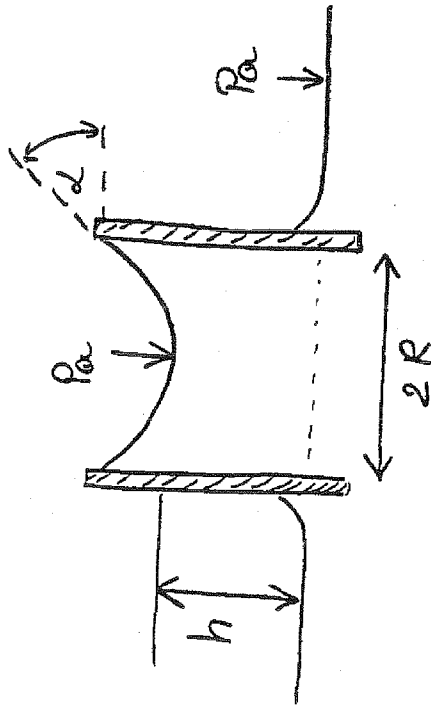
ruhendes Fluid $\Rightarrow$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Leftarrow$$

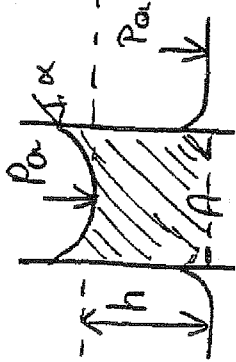
Bsp. 1:

Herleitung von $h = \frac{2\sigma \sin \alpha}{\rho g R}$

wobei h Flüssigkeitsanstieg, R Radius, σ Oberflächenspg. u. α Benetzungswinkel bedeutet.

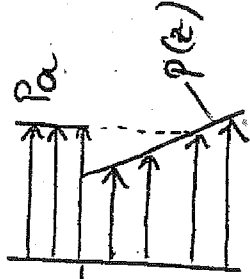


Lösg. 1:

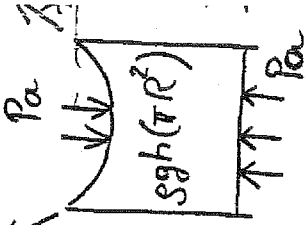


$$P_A = P_a$$

Druckverlauf



$$G = 2\pi R$$



Kräfte = Bilanz

Kräftegleichgew. in z-Richtung.

$$G = 2\pi R \sin \alpha + P_a \pi R^2 - P_a \pi R^2 - \rho g h \pi R^2 = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma \sin \alpha}{\rho g R}$$

barometrische Höhenformel

id. Gsgl.: $\rho = \frac{P}{RT} \quad P = \rho g h$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{P g}{RT}$$

isotherme Atmosphäre

$$z_0 < z < z_1, \quad T(z) = T_0 = \text{konst.}$$

$$\int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P} = - \frac{g}{RT_0} \int_{z_0}^{z_1} dz = - \frac{g}{RT_0} (z_1 - z_0)$$

bzw.

$$P_1 = P_0 \exp \left[- \frac{g}{RT_0} (z_1 - z_0) \right]$$

weitere Bsp. zur hydrostat. Grundglg.

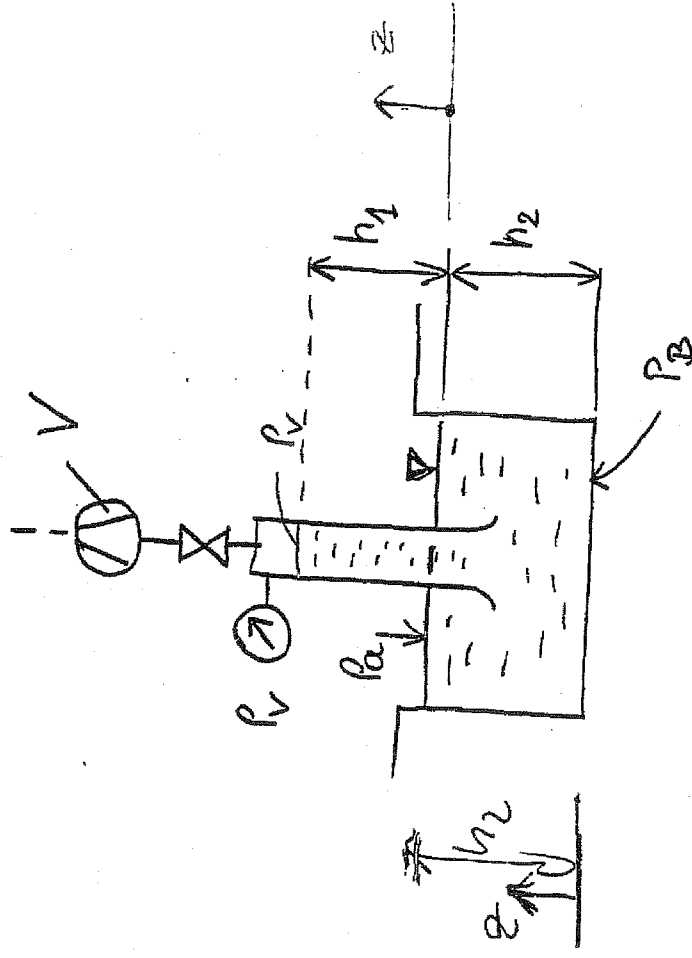
Bsp. 2:

Vakuumpumpe V erzeugt 95% Vakuum

a) Wasserspiegelhöhe h_1 für einen Atmosphärendruck

$$P_a = 0.96 \text{ bar ?}$$

b) Absolutdruck und Überdruck auf dem Boden des Beckens



Lsg. 2:

$$a) \quad P_v = 0.05 \text{ Pa}$$

$$P_a = P_v + \rho g h_1$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{P_a - P_v}{\rho g} = 9.30 \text{ m}$$

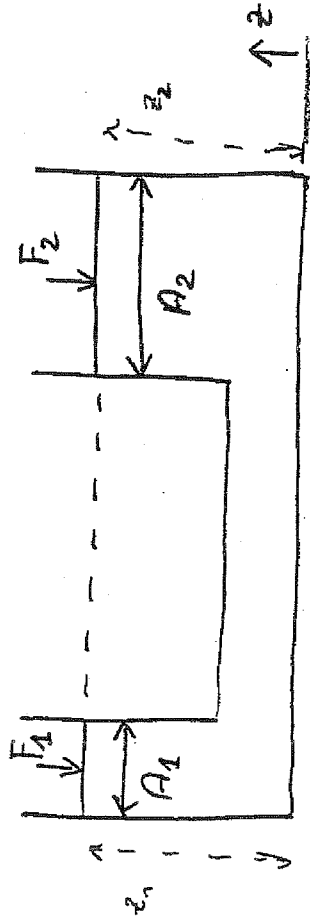
$$b) \quad P_B = P_a + \rho g h_2$$

$$\text{Überdruck: } \underline{\underline{\rho g h_2}}$$

$$P + \rho g z = P_0 = \text{konst.}$$

Bsp. 3:

Ein geschlossenes Syst. ist z. Bsp. mit Öl gefüllt. Für die Kolbenflächen gilt $A_2 \gg A_1$. Gesucht ist d. zslg. zwischen F_1 u. F_2 .



Lsg. 3:

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2$$

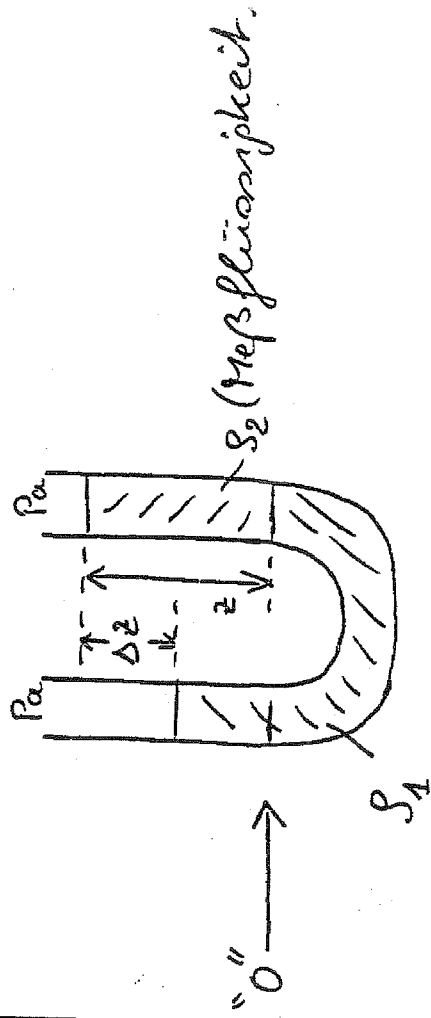
$$\frac{F_1}{A_1} + \rho g z_1 = \frac{F_2}{A_2} + \rho g z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Bsp. 4:

Bestimmung d. Dichte einer Meßflüssigkeit anhand eines U-Rohres und einer Vglflüssigkeit.



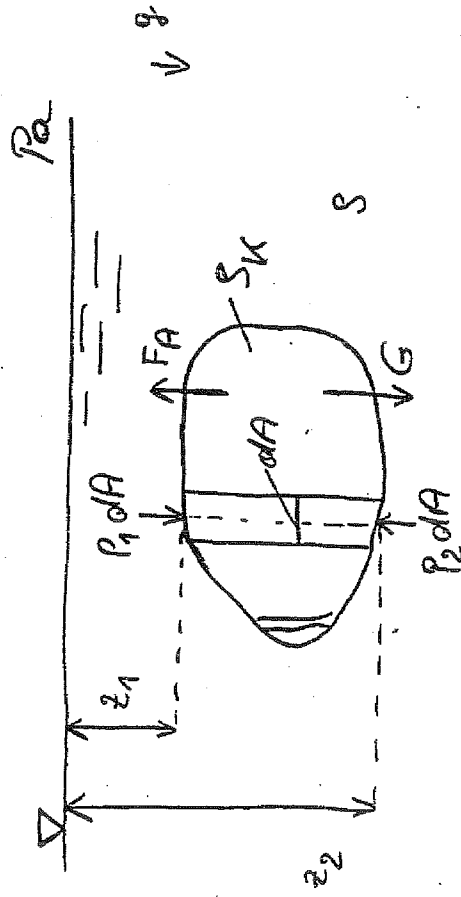
Lsg. 4:

$$P_0 = P_a + \rho_1 g (z - \Delta z) = P_a + \rho_2 g z$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{z - \Delta z}{z}$$

Bsp. 5:

Bestimmung d. Auftriebs eines eingetauchten Körpers

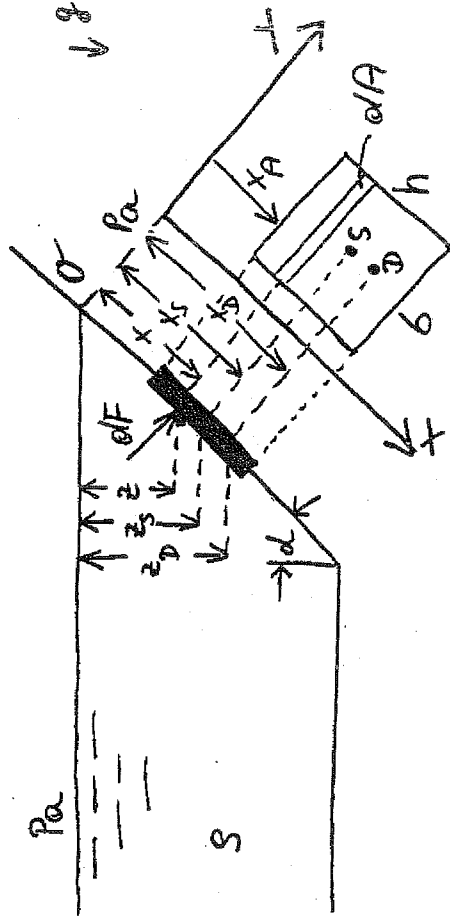


Lösg. 5:

$$\begin{aligned}
 dF_A &= p_2 dA - p_1 dA \\
 &= (p_a + \rho g z_2) dA - (p_a + \rho g z_1) dA \\
 &= \rho g (z_2 - z_1) dA \\
 \underline{\underline{F_A}} &= \rho g \int_A (z_2 - z_1) dA = \rho g \underline{\underline{V}}
 \end{aligned}$$

Bsp. 6:

Ein offenes Gefäß ist mit Flüssigkeit gefüllt. Best. die aufzunehm. d. Flüssigkeitsdrucks auftretende Kraft auf d. geneigte Seitenwand und deren Angriffspunkt.



Lösg. 6:

$$\begin{aligned}
 p &= p_a + \rho g z = p_a + \rho g x \cos \alpha \\
 dF &= (p - p_a) dA = \rho g x \cos \alpha dA \\
 F &= \rho g \int_A x \cos \alpha dA
 \end{aligned}$$

Statisches Moment um "o"

$$\int x dA = x_s A$$

$$\Rightarrow F = \rho g x_S \cos \alpha \cdot A = \rho g z_S A = (\rho_S - \rho_a) A$$

$$p = f(z) \Rightarrow \text{Anriffspunkt } D \text{ v. } F \neq \text{Schwerpunkt } S \text{ v. } A$$

Momente ngleichgew. um y -Achse
 $\Rightarrow x_D$ (Koordinate von D)

$$x_D F = \int_A x \, dF$$

$$dF = \rho g x \cos \alpha \, dA = \rho g z \, dA \quad \text{bzw.}$$

$$F = \rho g x_S \cos \alpha \cdot A = \rho g z_S A$$

$$\int x^2 \rho g \cos \alpha \, dA = \underline{\underline{x_D}} x_S \rho g \cos \alpha A$$

Trägheitsmoment I_y von A bzgl. y

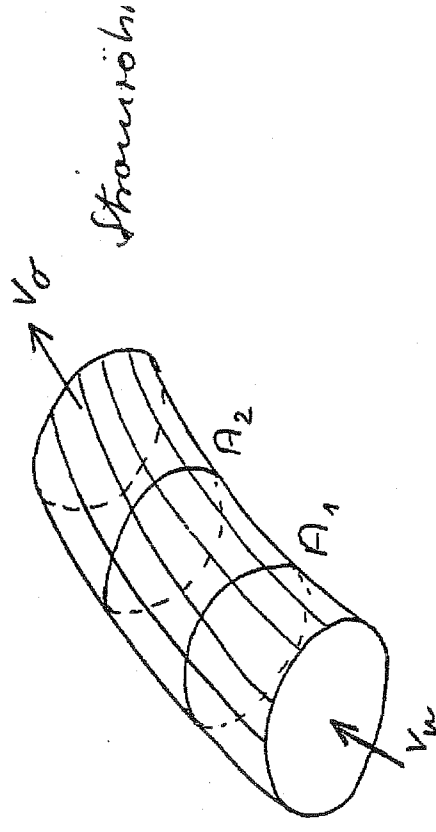
$$I_y = \int x^2 dA = I_S + A x_S^2$$

I_S : Flächenträgheitsmoment d. Achse durch S // zu y

$$\Rightarrow x_D = \frac{I_y}{x_S A} = x_S + \frac{I_S}{x_S A}$$

Kontinuitätsgleichung und Bernoulli Gleichung

Kontinuitätsgleichung



stationär

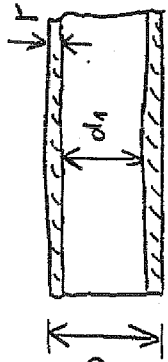
$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m} = \text{konst.}$$

inkompressible (dichtebest.) Fluide

$$\Rightarrow \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = \rho \dot{Q} = \dot{m} \quad (\text{Massenstrom})$$

$$\dot{Q} = v A = \frac{\dot{m}}{\rho} \quad (\text{Volumenstrom})$$

Bsp. 1:



Rohrleitg.

$$D = 320 \text{ mm}, \quad r = 10 \text{ mm}$$

$$\dot{m} = 120000 \frac{\text{kg}}{\text{h}} \quad \text{Öl}, \quad \rho = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

a) Best. Sie d. Strömgeschw.

b) Best. Sie d. lichten Durchmesser
für $v_2 = 1 \text{ m/s}$.

Lösg.:

$$a) \quad \dot{Q} = v_1 A_1 \quad d_1 = D - 2r$$

$$v_1 = \frac{\dot{Q}}{A_1} = \frac{\dot{m}}{\rho \pi d_1^2} = \underline{\underline{0.524 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$b) \quad \dot{Q} = \text{konst}$$

$$v_1 = 0.524 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

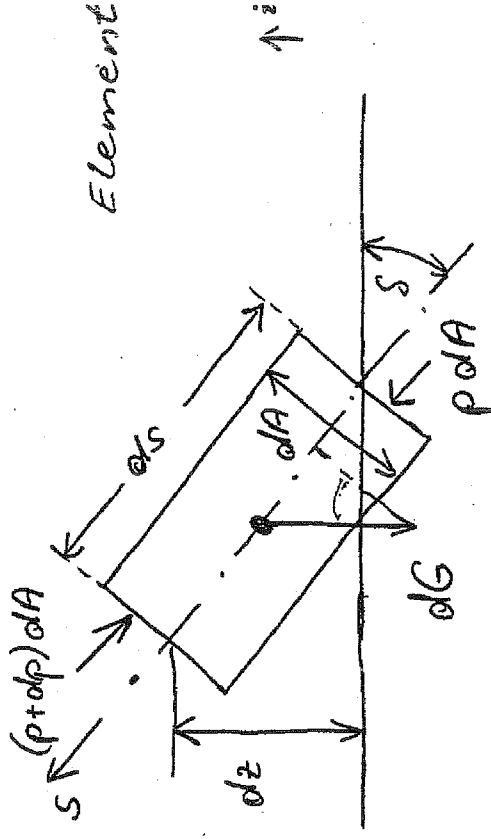
$$\frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2$$

$$\underline{\underline{d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 0.217 \text{ m}}}$$

Bernoulli Gleichung

2. Newtonsches Gesetz

$$\sum \vec{dF} = dm \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Reibungskräfte werden vernachlässigt!!

Kräfte in s-Richtung:

$$\sum d\vec{F} = -dG \sin \delta + p dA - (p+dp) dA$$

mit

$$dG = g dm = \rho g ds dA$$

$$\sin \delta = \frac{dz}{ds}$$

$$\rho \, ds \, dA \, \frac{dV}{dt} = -\rho g \, ds \, dA \, \frac{dz}{ds} - \rho p \, dA$$

$$\rho \, \frac{dV}{dt} = -\rho g \, \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds}$$

$$V = V(s, t) \Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial s} ds$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial (V^2/2)}{\partial s}$$

substantielle = lokale + konvektive
Beschleunigg. Beschleunigg.

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial s} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

Annahme: stationäre Ström.,
inkomp. Fluid, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g z = \text{konst}}$$

Bernoulli Gleichung

$$\int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{\rho}{2} \int V^2 + \int \rho g z + \rho g \int ds = 0$$

FLUID

MECHANIK

P: statische Druck

$\frac{\rho}{2} V^2$: dynamischer Druck
kinetischer Druck
Geschwindigkeitsdruck
Staudruck

$P + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g z$: Total- od. Gesamtdruck

monitort. liegendem Kontrollfaden

$P + \frac{\rho}{2} V^2 = P_0$: Totaldruck

Division durch ρg

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = \text{konstant}$$

geodätische Höhe +
Druckhöhe +

Geschwindigkeitshöhe = konstant

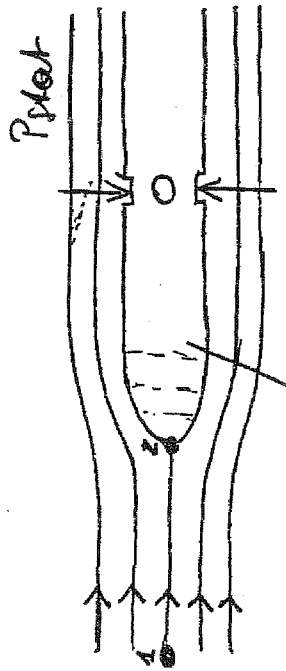
Bemerkg.: Die Bernoulli-Gleichung in obiger Form gilt für stationäre, reibungsfrei, inkompressible Strömung entlang einer Stromlinie.

TECHNISCHE STRÖMUNGSLERRE

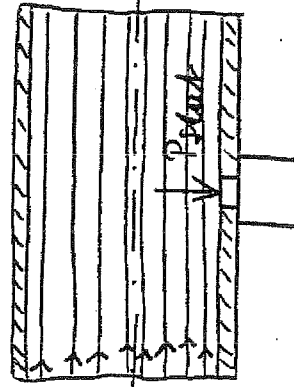
Anwendungen

Statischer Druck

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g z = \text{konst}$$

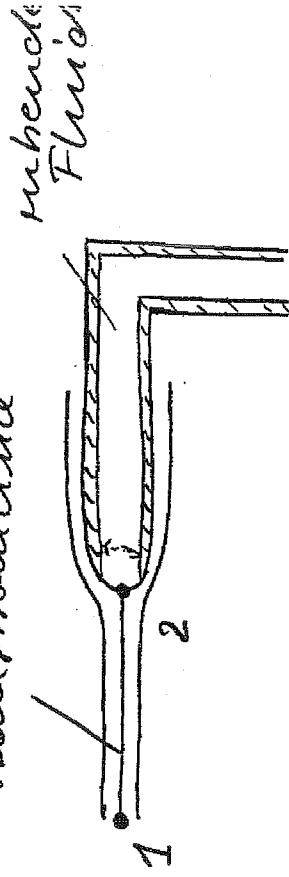


Drucksonde



Totaldruck

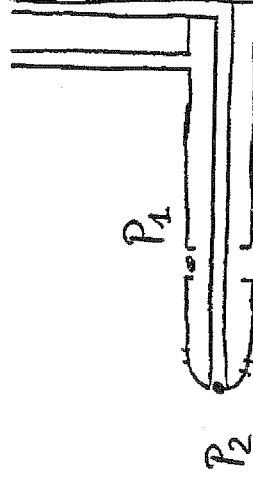
Stromlinie



Pitotrohr

$$P_{\text{Ges}} = P_0 = P_2 = P_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \quad (\text{Pitotdruck})$$

Staudruck



Pitotrohr

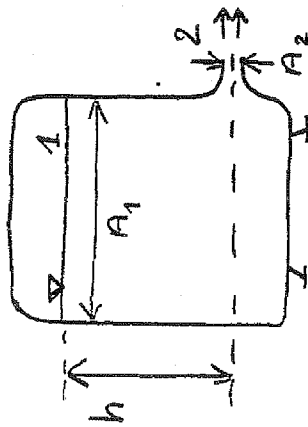
$$P_2 = P_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$$

$$\Rightarrow \rho v_1^2 = \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_2 - P_1 = \rho g \Delta z$$

⇒ Stromvergesamungen

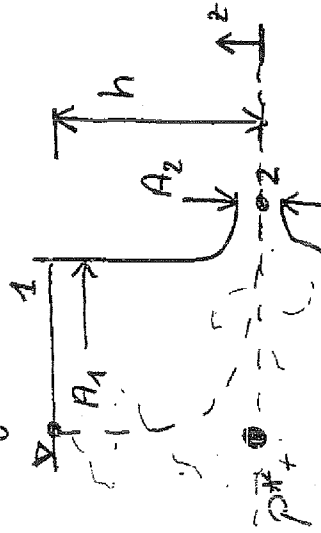
$$V_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}} = \sqrt{2g\Delta z}$$

Bsp. 2:



$A_1 \gg A_2, h$
Betr. sie eine
Bezieh. zur Berch.
von V_2 .

Lös. 2:



$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 + \rho g h = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$P_1 - P_2 + \rho g h = \frac{\rho}{2} V_2^2 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \right]$$

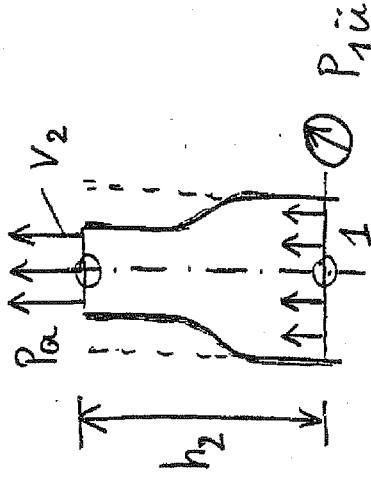
$$\Rightarrow V_2 = \left\{ \frac{2}{\rho} \frac{P_1 - P_2 + \rho g h}{\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \approx 1, \text{ oder } \frac{A_2}{A_1} \ll 1$$

mit $P_1 = P_2$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh} \quad (\text{Torricelli})$$

Bsp. 3:



Gegeben: $P_{1\ddot{u}} = 4 \text{ bar}, h_2 = 0.2 \text{ m},$
Benzin $\rho = 780 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, d_1 = 10 \text{ mm},$
 $d_2 = 2 \text{ mm}; P_{1\ddot{u}}$ Überdruck geg. P_a

Gesucht: V_2

Lös. 3:

$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho g h_2 + P_a$$

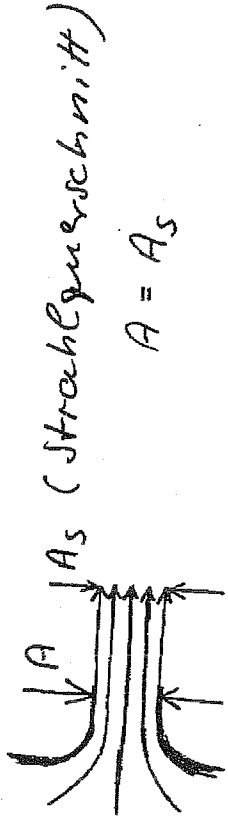
$$\underbrace{P_1 - P_a}_{P_{1\ddot{u}}} + \frac{\rho}{2} V_1^2 = \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho g h_2$$

$$V_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = \left[\frac{2 P_{1\ddot{u}} / \rho - 2 g h_2}{1 - (d_2/d_1)^4} \right]^{1/2}$$

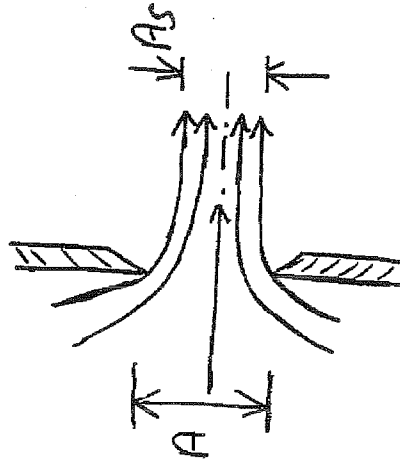
$$V_2 = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bis jetzt wurden gemündete
Düsen betrachtet



$$A = A_s$$

→ scharfkantiger Ausfluß:



Def. d. Kontraktionszahl ψ

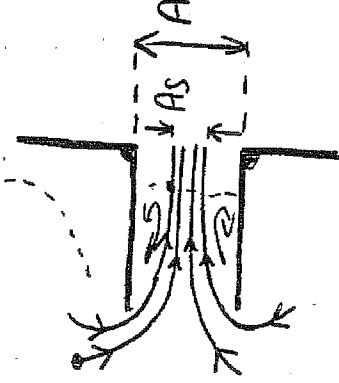
$$\psi = \frac{A_s}{A} \Rightarrow \psi \leq 1$$

z.Bsp.: schiffartige Öffnungen od.
kreisförmige Löcher

$$\psi_{\text{Näherg.}} = \frac{\pi}{2+\pi} = 0.611, \quad \psi_{\text{exp.}} \approx 0.607$$

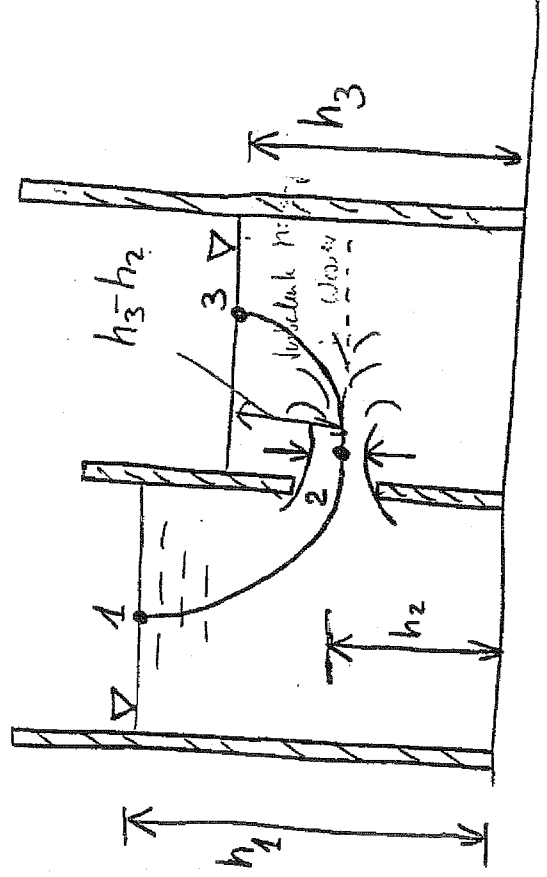
gemündete Düse: $\psi \approx 1$

Borda Mündung
hat größte Strahlkontr.



$$\Rightarrow 0.5 \leq \psi \leq 1$$

gültig für Auströmen in Luft
oder in Wasser (etc.)



$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$p_2 = p_3 + \rho g (h_3 - h_2)$$

$$= p_1 + \rho g (h_3 - h_2)$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$$

Bernoulli v. ① ↔ ② OK

auf keinen Fall 3. Glg. v. ② ↔ ③
da d. Strömung verlustbehaftet ist.

$$\text{Volumenstrom: } \dot{Q} = v_2 A_S = \psi A \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$$

Messung d. Durchflußvol. u. d. Geschw.

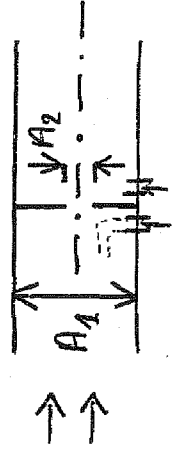
→ Drosselgeräte

Messung v. $\Delta p_W \sim v$ bzw

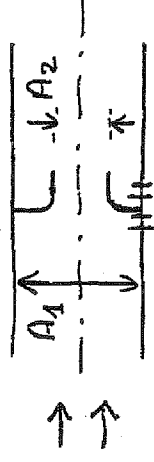
$$\Delta p_W \sim \dot{Q}$$

Durchflußstahl d., um id. Wert
an d. Realität anzupassen.

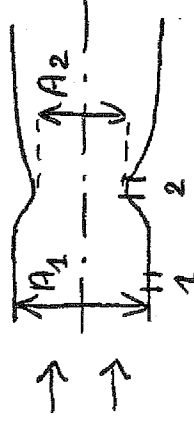
Berechn. u. Konstr. v. Drosselgeräten
in DIN 1952



Normblende



Normdüse



Venturidüse

verlustf. Ström.

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Flächenverhältnis m

$$m = A_2 / A_1$$

$$\Rightarrow v_2 = \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - m^2)} \right]^{1/2} = \left[\frac{2 \Delta p_W}{\rho(1 - m^2)} \right]^{1/2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - m^2}} \sqrt{\frac{2 \Delta p_W}{\rho}}$$

theoret. Vol.strom $\dot{Q}_{th}$

$$\dot{Q}_{th} = v_2 A_2 = \sqrt{\frac{1}{1-m^2}} \sqrt{\frac{2 \Delta p_w}{\rho}} A_2$$

tatsächl. Vol.strom $\dot{Q}_{re}$

$$\dot{Q}_{re} = \alpha \sqrt{\frac{2 \Delta p_w}{\rho}} A_2$$

Durchflusskoeff. α

$$\alpha = f(\text{Form}, m, A_2, v_2, S, Z)$$

Rohrleitungsgesamungen

Energieändernde Anlagenteile

⇒ erweiterte Bernoulli Gleichung,
die Zu- u. Abfuhr von Arbeit ent-
hält

Annahme: Strög. von ① nach ②

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + e_a = P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + e_v$$

e_a : Arbeitsglied; > 0 bei Arbeitszufuhr

e_v : Verlustglied; immer > 0

Auswirkgn. d. Reibg → Druckverlust =
Δm Δp_v

allgemeine Angabe: $\Delta p_v = f S \frac{v^2}{2}$

$$\Delta p_v = \Delta p_{VR} + \Delta p_{VE}$$

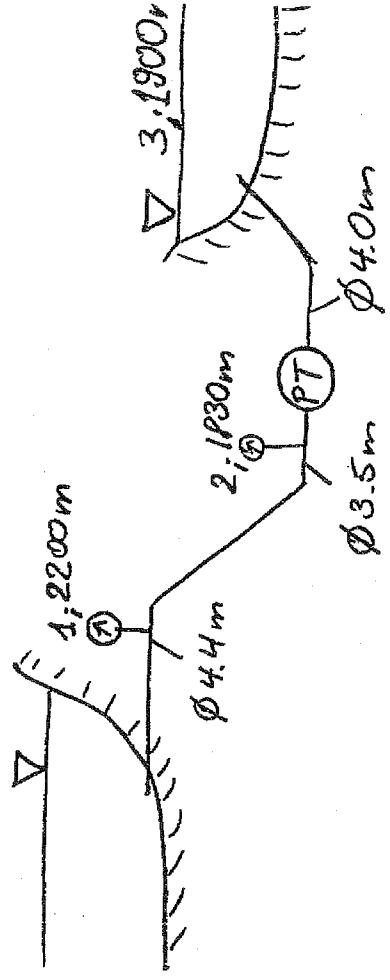
Δp_{VR} : Reibverluste d. geraden Rohrs

Δp_{VE} : Verluste durch Einbauten

Bsp. 4:

Wasserkraftanlage → Turb. betr. → Stromerzeug.

Überdruckwkt. von 2
stellen an d. Messstation;
→ Pumpbetr. → Hochpumpe
von Wasser



Druck [bar]	ϕ [m]	Höhe über Meeresspieg. [m]
$p_1 = 9$	$d_1 = 4.4$	$h_1 = 2200$
$p_2 = 48$	$d_2 = 3.5$	$h_2 = 1830$

$$\dot{Q} = 60 \text{ m}^3/\text{s}$$

- a) Turb.- od. Pumpbetrieb?
- b) Verluste an mech. Energie zw. 1 und 2 ausgedrückt in Δp_v und $\Delta h_v = \Delta p_v / \rho g$?
- c) Reibungsverluste zw. 2 u. 3 mit $\xi = 3.0$ treten auf. Dr. Maschinenwirkungsgrad η_p od. Pumpe od. Turb. ist 90%, wobei $\eta_p = \frac{P_h}{P_W}$ mit P_h : Zuwachs an mech. Leistg. zw. Aus- u. Eintritt, P_W : zugeführte Leistg. Best. Sie d. Turb.- od. Pumpenleistg. P_W !

Lsgg. 7:

- a) Annahme: Turb. Betrieb
ström. v. 1 $\rightarrow$ 2.

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p_{v,1-2}$$

$$v_1 = \dot{Q} / A_1 = 3.95 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \dot{Q} / A_2 = 6.24 \text{ m/s}, \quad \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow \Delta p_{v,1-2} = -2.82 \text{ bar}$$

$$\Delta p_{v,1-2} < 0 \Rightarrow \text{ström. v. 2} \rightarrow 1$$

⇒ Pumpbetrieb

$$b) \Delta p_{v,2-1} = 2.82 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta h_{v,2-1} = \frac{\Delta p_{v,2-1}}{\rho g} = 28.7 \text{ m}$$

$$c) P_W : ?$$

$$P_h = \dot{Q} \cdot Z$$

Bernoulli v. 3 $\rightarrow$ 1

$$p_3 + \rho g h_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 + \underbrace{Z}_{\text{Z}} = p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \Delta p_{v,2-1} + \Delta p_{v,3}$$

$\frac{Z}{g}$: übertragen mech. Arbeit/kg

$$P_h^0 = P_0 + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z$$

$$P_F + \frac{\rho v_F^2}{2} + \rho g (h + \Delta h) = P_0 + \rho g \Delta h$$

$$v_F \rightarrow 0$$

$$P_h + \frac{\rho v_h^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_F^2}{2} + \rho g h \quad ! = 0$$

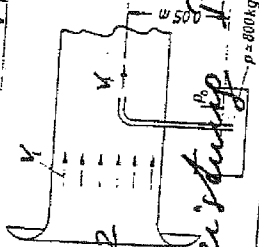
$$P_h = \frac{\rho v_F^2}{2} + \rho g h$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_h - \rho g h)}$$

$$\Delta P_{V,3-2} = \frac{\rho}{2} v^2, \text{ wobei } v = \frac{Q}{A}$$

Ansagen einer Flüssigkeit durch einen Luftstrom. Welche Luftgeschwindigkeit ist erforderlich, damit die Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit $w_F = 1 \text{ m/s}$ austritt? $\rho_L = 1,22 \text{ kg/m}^3$ (reibungsfrei)

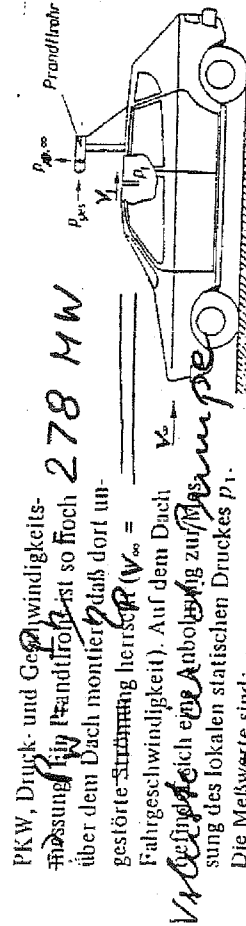
zugeführte mechan. Leistung P_W ?



$$a) P_h + \frac{\rho v_h^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_F^2}{2} \Rightarrow P_h = P_0 + \frac{\rho v_F^2}{2} = 250 \text{ MW}$$

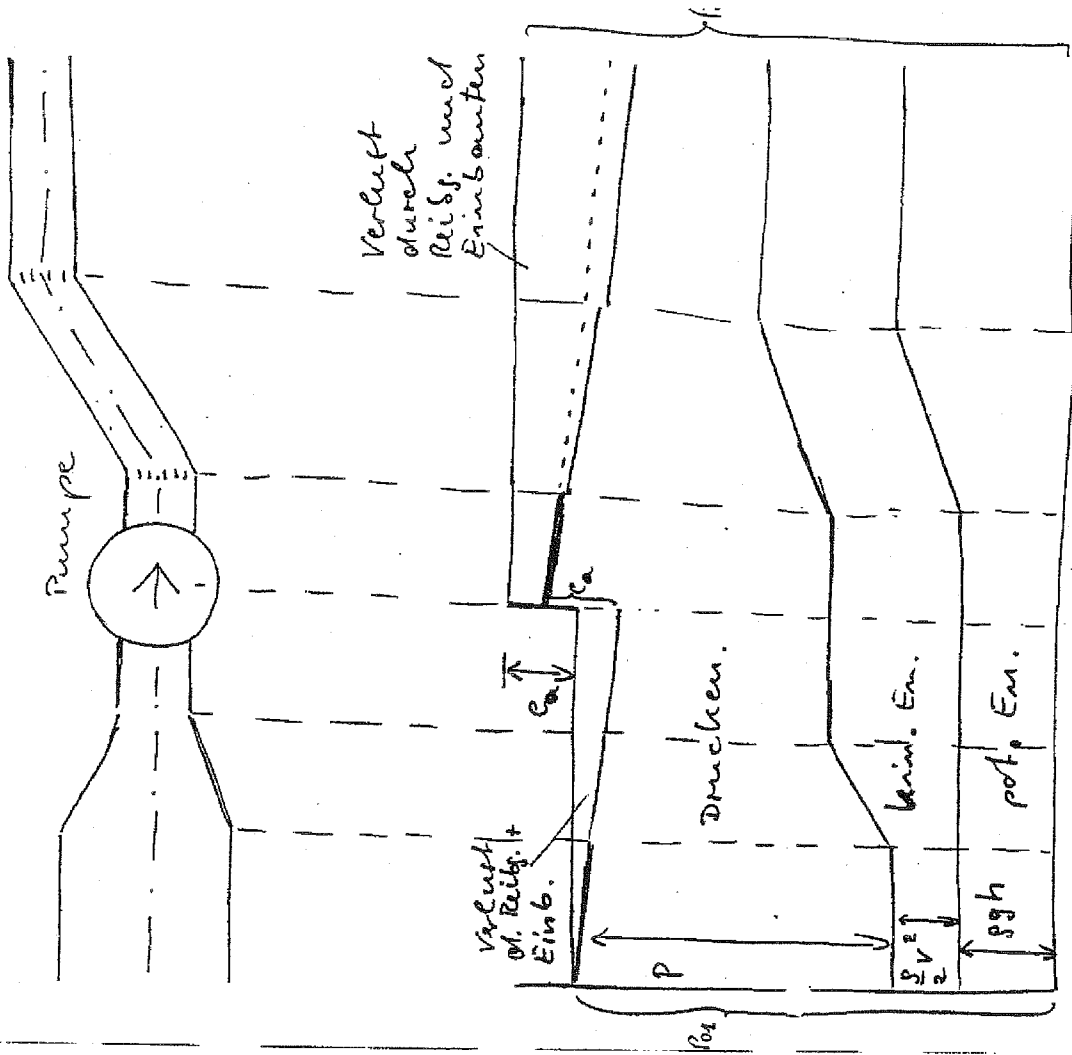
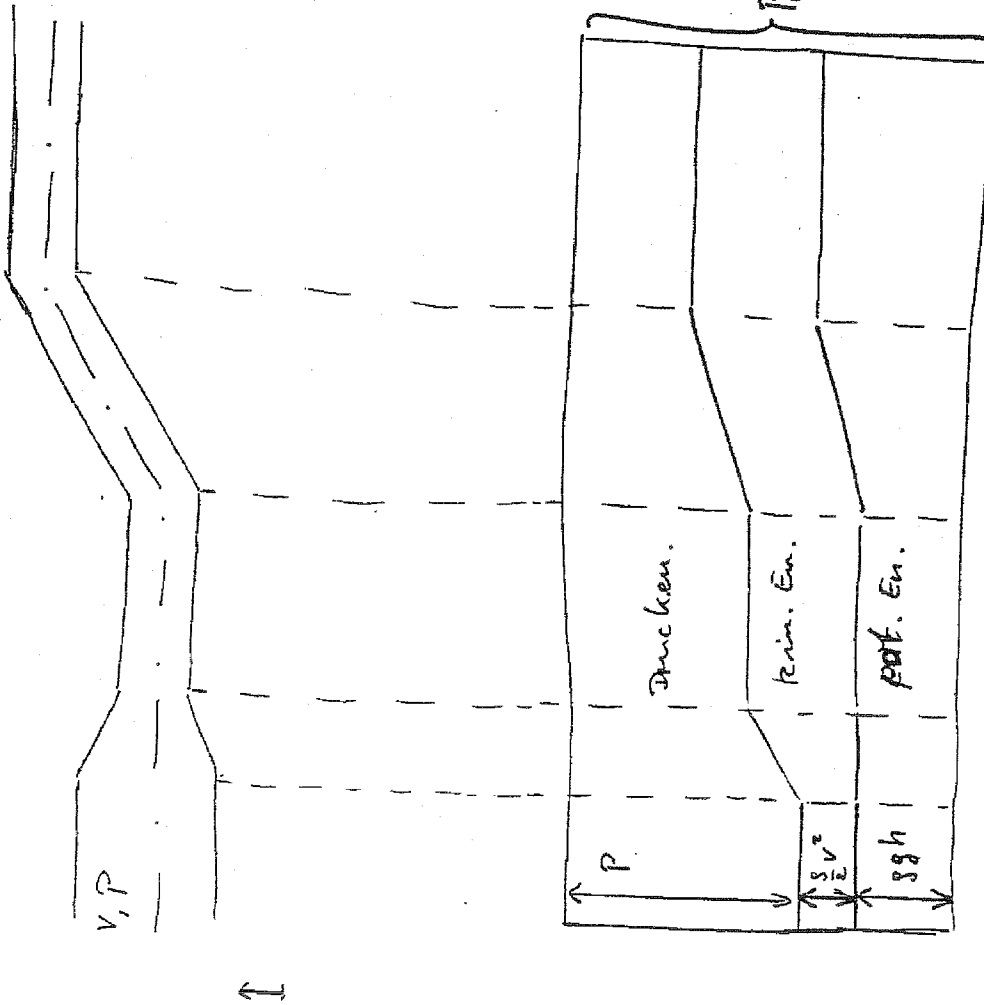
$$b) P_{00} + \frac{\rho v_0^2}{2} = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{\rho} (P_{00} - P_1)}$$

c) geschätzte Größen relativ prüfen



PKW, Druck- und Geschwindigkeitsmessung. Pitot-Stat. so hoch über dem Dach montiert, daß dort ungestörte Strömung herrscht ($v_\infty =$ Fahrgeschwindigkeit). Auf dem Dach (v_c = Geschwindigkeit am Dach) Anbringung des lokalen statischen Druckes p_1 . Die Meßwerte sind:

- $P_{ges} = 1,15 \text{ kg/m}^3$, Windstille sei vorausgesetzt.
- $\rho = 1,15 \text{ kg/m}^3$, Windstille sei vorausgesetzt.
- a) Wie groß ist die Fahrgeschwindigkeit w_∞ ?
- b) Welche lokale Luftgeschwindigkeit w_1 herrscht an der Meßstelle am Dach außerhalb der Grenzschicht, wenn angenommen werden kann, daß die Strömung bis dorthin verlustlos erfolgte?
- c) Wie wirkt sich Gegenwind von 5 km/h auf das Meßergebnis aus?



$$P_{01} + e_a = P_{02}$$

Impulsatz und

Impulsmomentensatz

Notwendig: Kräfte v. der Strömung
auf d. Umgebung
zu bestimmen!

Impulsatz

$$\text{Impuls: } \vec{I} = m \vec{v} \\ \text{bzw. } d\vec{I} = \vec{v} g dV$$

$$\text{Impuls d. Systems } \vec{I} = \int_{\text{sys}} \vec{v} g dV$$

2. Newtonsches Gesetz

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{sys}} \vec{v} g dV = \sum_{\text{sys}} \vec{F}$$

zum Zeitpkt. t sei $K_S = KV$

$$\rightarrow \text{Reynold's } \sum_{\text{sys}} \vec{F}_{\text{Kontrollvol}} = \sum_{KV} \vec{F}_{KV}$$

anhand d. Transporttheorems
mit $B_{\text{sys}} = \vec{I}$ und $b = \vec{v}$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\text{sys}} \vec{v} g dV}_{KS} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \vec{v} g dV + \int_{KF} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{KV}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \vec{v} dV + \int_{KF} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_{kv} \right]$$

Impulssatz

stationäre Strömung

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{KF} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_{kv}$$

äußere Kräfte: Volumenkräfte,
Oberflächenkräfte

Volumenkräfte $\rightarrow$ Gravitationskraft

$$\vec{F}_g = \int_{KV} \rho \vec{g} dV$$

Oberflächenkräfte $\rightarrow$ Reibkraft $\vec{F}_r$

$\rightarrow$ Druckkraft $\vec{F}_p$

$$\vec{F}_p = - \int_{KF} p \vec{n} dA$$

$$p = p_a = \text{konst} \Rightarrow \vec{F}_p \rightarrow 0$$

weiterhin $\rightarrow$ Stützkraft $\vec{F}_S$

$\vec{F}_S$: Kraft von einem festen Körper auf das strömende Fluid

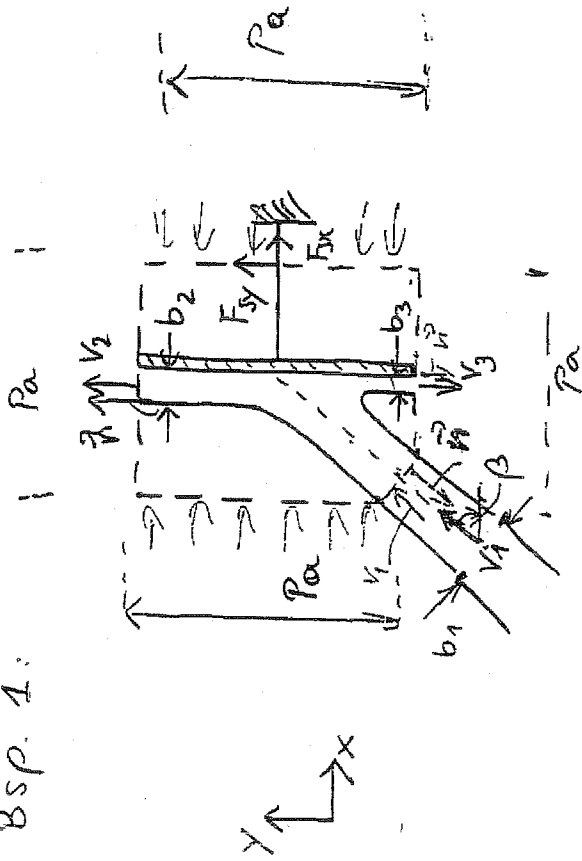
$\Rightarrow$ Imp.satz f. stat. Ström. mit d. jeweiligen Kraftanteilen

$$\boxed{\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{KF} \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \vec{F}_g + \vec{F}_r + \vec{F}_p + \vec{F}_S}$$

Bemerkg.: Kontrollfläche muß einfach zusammenhängend sein.

Beispiele zum Impulssatz

Bsp. 1:



Gegeben: $P_a = \text{konst.}$, keine Verluste,

v_1, b_1, β

Gesucht: F_{sx}, F_{sy}, b_2, b_3

Lösung. 1:

Bernoulli: $P_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 = P_a + \frac{\rho}{2} v_3^2$

$\Rightarrow v_1 = v_2 = v_3$

Konting. glg.

$$v_1 b_1 = v_2 b_2 + v_3 b_3$$

$$\Rightarrow b_1 = b_2 + b_3$$

Komp. d. Stützkraft aus Imp. Satz
x-Richtung: $\vec{v} \cdot \vec{n} = \|\vec{v}\| \|\vec{n}\| \cos \alpha$

$$- \rho v_1 \cos \beta v_1 b_1 + 0 = F_{sx}$$

y-Richtung:

$$- \rho v_1 \sin \beta v_1 b_1 + \rho v_2^2 b_2 - \rho v_3^2 b_3 = F_{sy} = 0$$

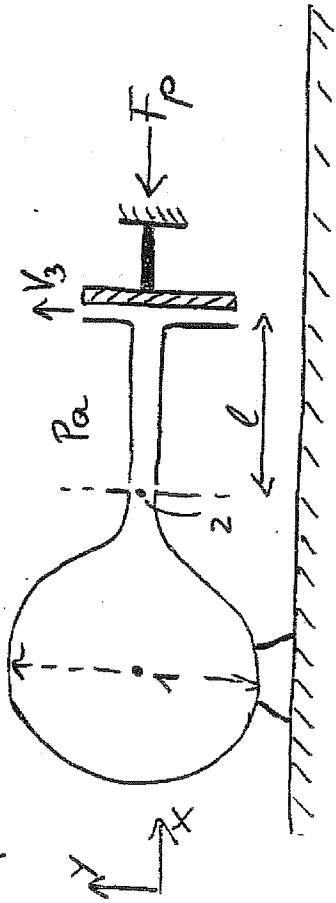
$$\Rightarrow -b_1 \sin \beta + b_2 - b_3 = 0$$

$$-b_1 \sin \beta + b_2 - b_1 + b_2 = 0$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{b_1}{2} (1 + \sin \beta)$$

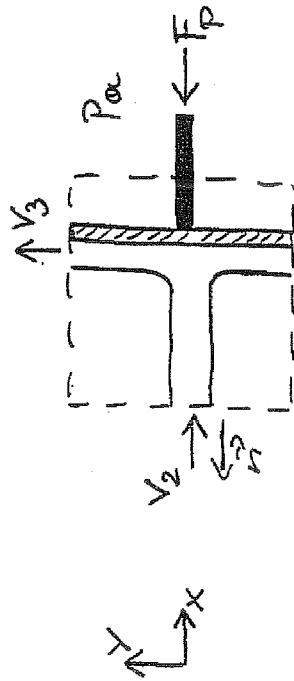
$$b_3 = \frac{b_1}{2} (1 - \sin \beta)$$

Bsp. 4.



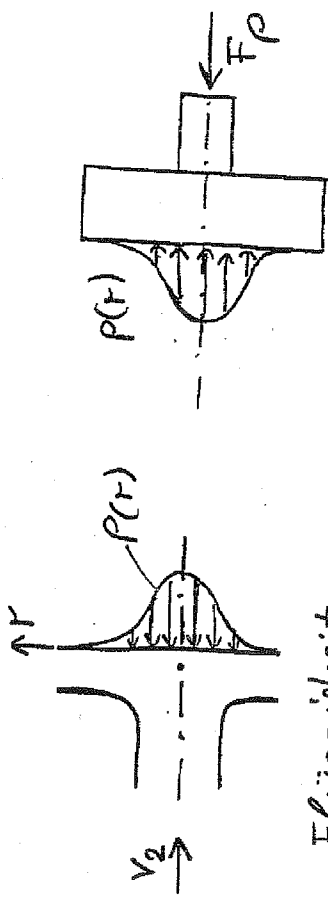
Aus einem Behälter austretendes Fluid wird durch eine Platte um 90° umgelenkt. Gegeben sind $p_{\text{Hü}} = 2 \text{ bar}$, $d_2 = 5 \text{ mm}$, Fluid: Wasser. Gesucht: F_P .

Lsg. 2:



Imp. Satz x-Richtung.

$$-\rho v_2^2 A_2 = -F_P \Rightarrow F_P = 2 p_{\text{Hü}} A_2$$



Flüssigkeitskörper

Platte

Umkehrung $\rightarrow p(r)$ -Verteilung

ohne Imp. Satz: F_P aus Integr. v. $p(r)$.
d.h. Kenntnis d. Strög.

instabile d. Kontr. fl.
wichtig

mit Imp. Satz: Kenntnisse d. Strög. =
Verhältnisse instabil
alle d. Kontr. fl. nicht
statisch

$$\frac{p_{\text{Hü}} + p_a}{\rho} = p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 p_{\text{Hü}} / \rho} = 20 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho V_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 0.393 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\underline{F_P = \dot{m} V_2 = 7.85 \text{ N}}$$

$F_P \hat{=}$ d. Rückstoßkraft auf d. Behälter

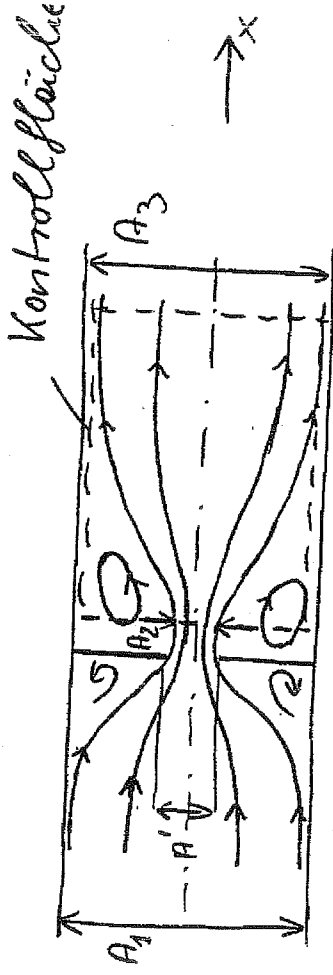
Ändrg. v. F_P , wenn e verkleinert wird, $e \rightarrow 0$?

$$F_P = \dot{m} V_2 = A_2 \rho V_2^2 = 2 A_2 P_{\text{Hü}}$$

$$\Rightarrow F_P = 2 F_{e=0}$$

$$F_{e=0} = \frac{F_P}{2}, \text{ da } \dot{m} \rightarrow 0 \text{ für } e \rightarrow 0$$

Bsp. 3:



Blende

$$\text{Gegeben: } \text{Ausgangsgeschw. } A_1', \quad \psi = \frac{A_2}{A_1'}$$

$$\text{Gesucht: } \rho V_2^2 / 2 V_1^2 = f(\psi, m)$$

$$\text{Lösung: Druckverlust } \Delta p_v = p_{02} - p_{03}$$

$$\Delta p_v = p_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 - (p_3 + \frac{\rho}{2} V_3^2)$$

$$= p_2 - p_3 + \frac{\rho}{2} V_2^2 \left(1 - \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^2 \right)$$

$\Downarrow$

Imp. satz in x-Richtung.

$$\rho V_3^2 A_3 - \rho V_2^2 A_2 = (p_2 - p_3) A_3$$

$$P_2 - P_3 = \rho v_3^2 - \rho v_2^2 \frac{A_2}{A_3}$$

$$v_2 A_2 = v_3 A_3$$

$$= \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[2 \left(\frac{A_2}{A_3} \right)^2 - 2 \left(\frac{A_2}{A_3} \right) \right]$$

$$\Delta P_V = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[1 - 2 \left(\frac{A_2}{A_3} \right) + \left(\frac{A_2}{A_3} \right)^2 \right]$$

$$\Delta P_V = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[1 - \frac{A_2^2}{A_3^2} \right]^2$$

$$\frac{\Delta P_V}{\frac{\rho}{2} v_2^2} = \left(1 - \frac{A_2}{A_3} \right)^2$$

Carnotsche
Glg. d. unströmigen
Rohrverengung.

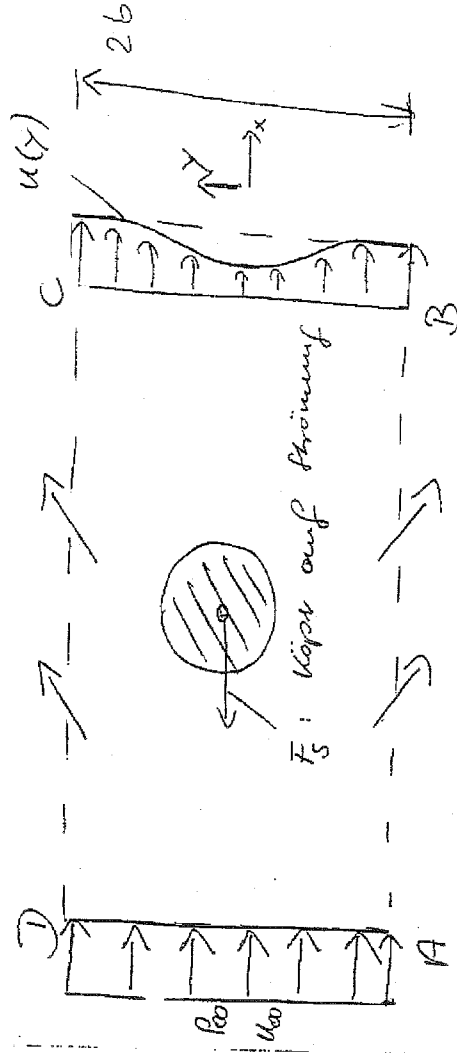
mit $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{1}{4m}$ bzw.

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{A_2}{A_1} = 4m = \frac{A_2}{\frac{A_1}{4m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_V}{\frac{\rho}{2} v_1^2} = \int_B = \left[\frac{1 - 4m}{4m} \right]^2$$

Beispiel (Impulsrate:

→ Widerstand aus d.
Geschw. verhält



$$\dot{I}_x = \int_{-b}^b u u dy = \int_{-b}^b u^2 dy$$

$$\dot{I}_{AD} = - \int_{-b}^b \rho u_0 u_0 dy = - \rho \int_{-b}^b u_0^2 dy = - 2b \rho u_0^2$$

mit Konti. Glg. folgt:

$$2b \rho u_0^2 = \dot{m}_{DC} + \dot{m}_{AB} + \int_{-b}^b \rho u(y) dy \Rightarrow$$

$$\dot{m}_{DC} + \dot{m}_{AB} = \int_{-b}^b (u_{\infty} - u) dy$$

$\Rightarrow$ x-Impuls des austretenden Massenflusses entlang DC und AB

$$\dot{I}_{DC} + \dot{I}_{AB} = \int_{-b}^b u_{\infty} (u_{\infty} - u) dy,$$

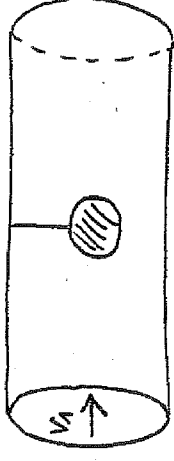
da entlang DC und AB nahezu u_{∞} auftritt!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dI_x}{dt} &= \dot{I}_{BC} + \dot{I}_{AD} + \dot{I}_{DC} + \dot{I}_{AB} \\ &= \int_{-b}^b (u^2 - u_{\infty}^2) dy + \int_{-b}^b u_{\infty} (u_{\infty} - u) dy \\ &= \int_{-b}^b (u^2 - u_{\infty} u) dy = - \int_{-b}^b u (u_{\infty} - u) dy \end{aligned}$$

$$- \int_{-b}^b u (u_{\infty} - u) dy = -F_S$$

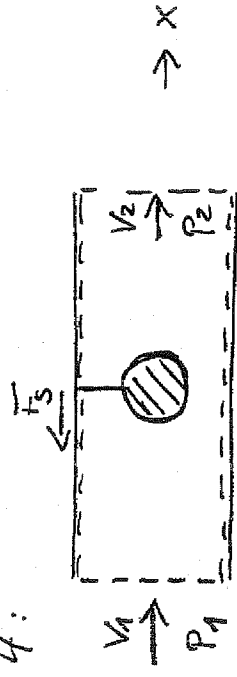
$$\Rightarrow F_S = \int_{-b}^b u (u_{\infty} - u) dy$$

Bsp. 4:



Geben Sie eine Vorgehensweise o. d. Beispiel eine Berechnung für die Widerstandskraft o. d. Einbaues an.

Lösung 4:



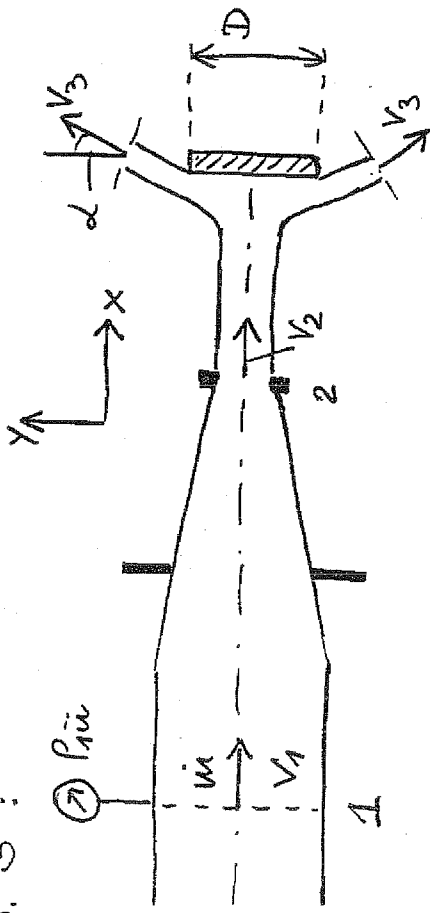
Konting. $v_1 = v_2$

Imp. satz in x-Richtung.

$$\dot{m}(v_2 - v_1) = 0 = (p_1 - p_2)A - F_S$$

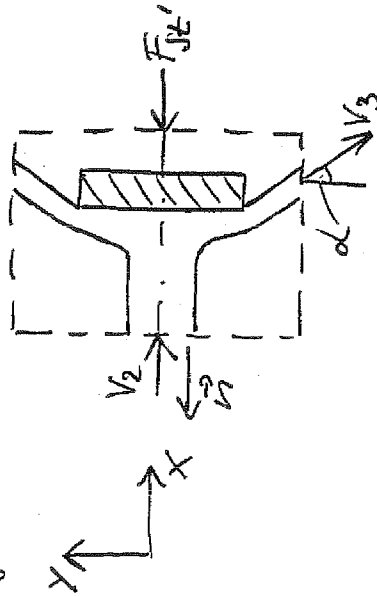
$$F_W = -F_S = (p_2 - p_1)A$$

bsp. 4:



Geben Sie für d. Wasserspritzanlage die Kraft F_{st} an, die d. Strahl auf d. Platte ausübt; es ist $p_{1u} = 4 \text{ bar}$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $d_2 = 20 \text{ mm}$; die Ströme sind Strömungsfrei.

Lsg. 5:



Bernoulli 2-3

$$p_{02} + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_{03} + \frac{\rho}{2} v_3^2 \Rightarrow v_2 = v_3$$

Impulse in x-Richtung.

$$\text{in } (v_2 \sin \alpha - v_3) = -F_{st}'$$

Es sei $\alpha = 0 \Rightarrow$

$$F_{st}' = m v_2$$

F_{st}' : Kraft v. d. Platte auf den Wasserstrahl

F_{st} : Kraft v. d. Strahl auf d. Platte
 $\stackrel{1}{=} -F_{st}'$

Bernoulli 1-2

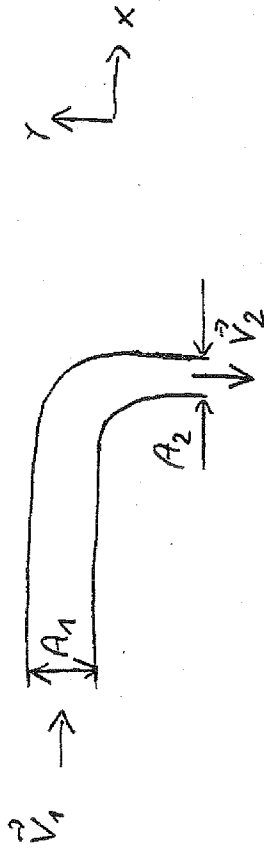
$$p_{10} - p_{02} = p_{1u} + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 p_{1u}}{\rho \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right]}}$$

$$\underline{\underline{F_{st} = m v_2 = 254.5 \text{ N}}}$$

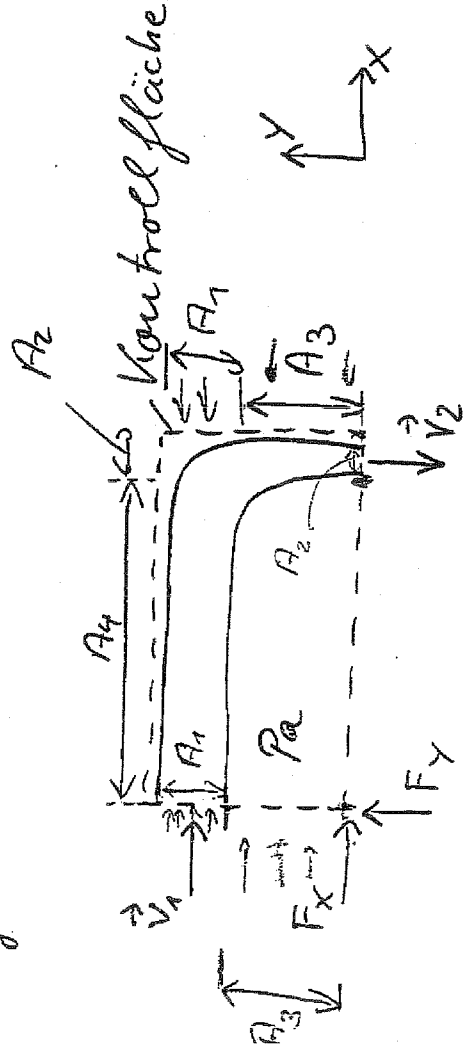
Bsp. 6:



Gegeben: Reibungsfreie Ström. durch einen 90° Krümmer; folgende Größen sind bekannt $p_1 = 221 \text{ kPa}$, $\vec{V}_2 = -16 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $A_1 = 0.01 \text{ m}^2$, $A_2 = 0.0025 \text{ m}^2$, $p_a = 101 \text{ kPa}$, Wasser

Gesucht: F_x, F_y

Lsg. 6:



Imp.satz in x-Richtung.

$$-\rho V_1^2 A_1 = p_1 A_1 + p_a A_3 - p_a (A_1 + A_3) + F_x$$

$$F_x = -\rho V_1^2 A_1 - (p_1 - p_a) A_1$$

Kontin.glg.

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow F_x = -1.36 \text{ kN}$$

$\Rightarrow F_x$ weist auch als angenommen in die negative x-Richtung.

Imp.satz in y-Richtung.

$$-\rho V_2^2 A_2 = p_a A_4 + p_a A_2 - p_a A_2 - p_a A_4 + F_y$$

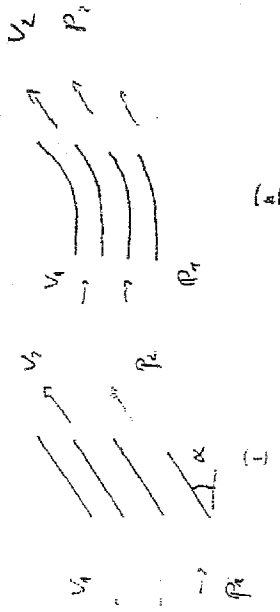
$$F_y = -\rho V_2^2 A_2 = -639 \text{ N}$$

$\Rightarrow F_y$ weist in die negative y-Richtung

mit Druck p_1 und p_2 und T_{1y} und T_{2y} etc.

Stärke α an

gg: $g_1, v_1, \alpha, \beta_1$



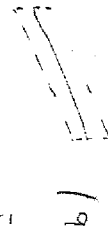
v_2

$p_1 - p_2$

$p_1 - p_2$

T

a) $v_1 \beta_1 = v_2 \beta_2 \cos \alpha \rightarrow v_2 = \frac{v_1}{\cos \alpha}$



$T_x = -g v_1^2 \beta_1 + g v_2^2 \beta_2 \cos \alpha = (p_1 - p_2) \beta_1 + T_{1x}$

$T_y = g v_2^2 \beta_2 \sin \alpha \cos \alpha = T_{1y}$

Winkel ist normal zur Schicht $\tan \alpha = -\frac{T_{1x}}{T_{1y}}$

$-g v_1^2 \beta_1 + g v_2^2 \beta_2 = (p_1 - p_2) \beta_1 + T_{1x} = 0$

$p_1 - p_2 = -\frac{T_{1x}}{\beta_1} = +\frac{T_{1y} \tan \alpha}{\beta_1} = g v_2^2 \sin \alpha \cos \alpha \tan \alpha$

$= g \frac{v_1^2}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = g v_1^2 \tan \alpha$

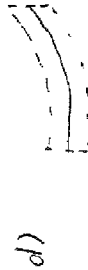
c) $p_{01} - p_{02} = (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} g (v_1^2 - v_2^2) =$
 $= g v_1^2 \tan^2 \alpha + \frac{1}{2} g \left(v_1^2 - \frac{v_1^2}{\cos^2 \alpha} \right)$
 $= g v_1^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)$
 $= g v_1^2 \frac{\sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2}}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} g v_1^2 \tan^2 \alpha$

d) $T_x = -T_{1x} = g v_1^2 \beta_1 \tan^2 \alpha$
 $T_y = -T_{1y} = -g v_1^2 \beta_1 \tan \alpha$

b) Brechzahl $p_1 + \frac{1}{2} g v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} g v_2^2$

$\rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} g v_1^2 \tan^2 \alpha$

c) $p_{01} - p_{02} = 0$ Winkel α



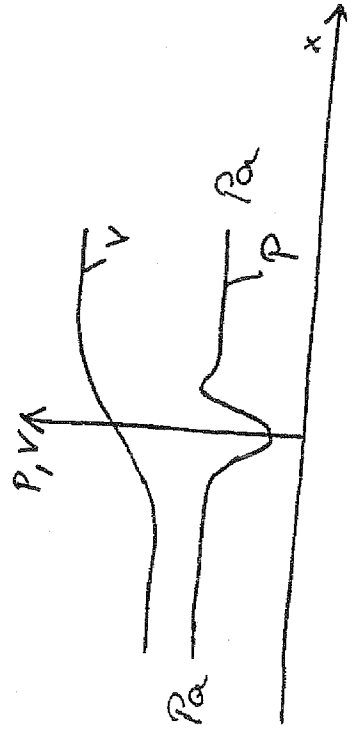
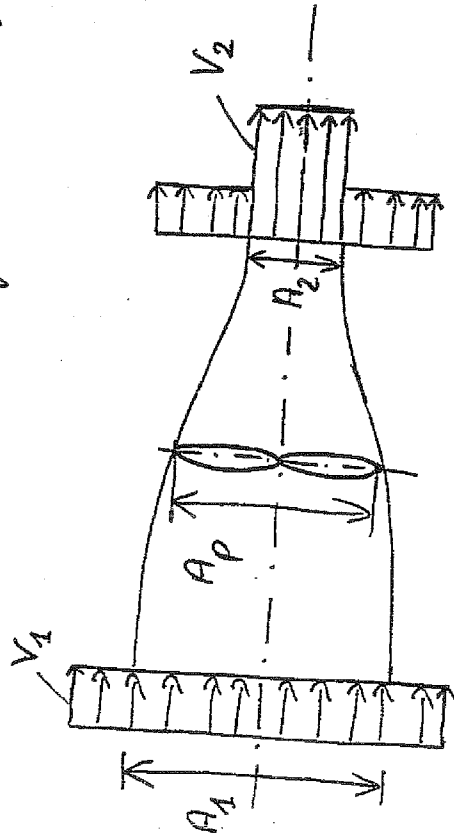
$T_x = -T_{1x} = (p_1 - p_2) \beta_1 - \frac{1}{2} g v_1^2 \beta_1 \tan^2 \alpha$

$T_y = -T_{1y} = -g v_1^2 \beta_1 \tan \alpha$

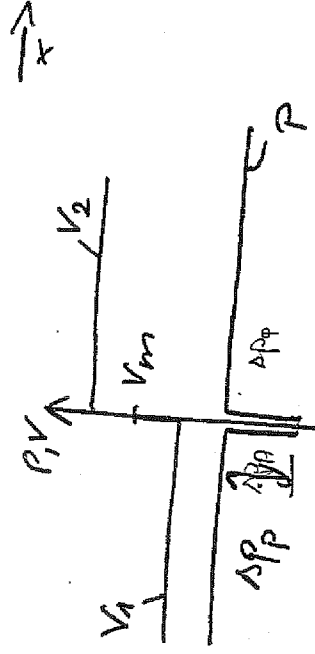
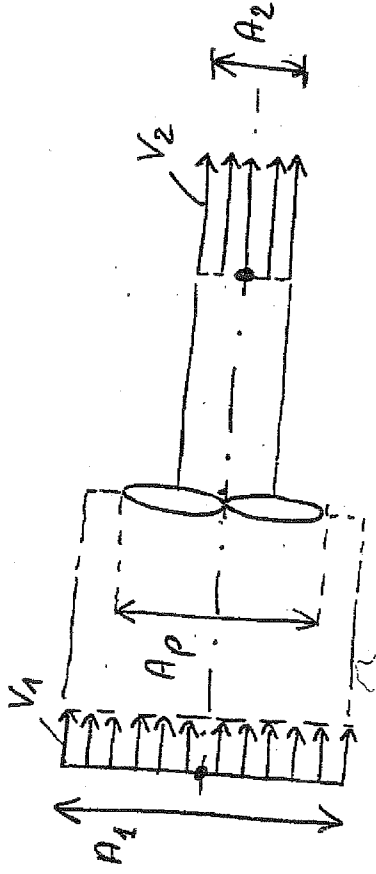
Vereinfachte Propellertheorie

- Annahmen:
- Anzahl d. Flügel ohne Einfluß auf d. Schub
 - Strahltheorie ohne Einfluß auf ax. Geschw.
 - keine Verluste bei Beschleunigung u. Verzögerung

Analyse für ein mitbewegtes Kontrollvolumen; Umgebungsdruck ist konst.



Darstellung d. Annahmen:

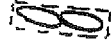


Impulssatz



$$m(V_2 - V_1) = \underbrace{\rho V_m A_p (V_2 - V_1)}_{F_S} = F_S = \rho Q \Delta p$$

V_m aus



$$0 = (P_e - P_f) A_p + F_S$$

$$F_S = (P_f - P_e) A_p$$

$$A_p \rho \Delta p = F_S$$

und Bernoulli:

$$P_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_c + \frac{\rho}{2} v_m^2$$

$$P_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 = P_r + \frac{\rho}{2} v_m^2$$

$$I) \Delta P_P = P_r - P_c = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} (v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

mit $\frac{I}{\Delta P_P} = S v_m (v_2 - v_1)$ folgt

$$v_m = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$$

Bemerkg.: Analoges Ergebnis für Windenergieanlage.

Verfälschungswirkgrad η_P enthält mech. Minusverluste

$$\eta_P = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{F_S v_1}{\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)} = \frac{\rho (v_2 - v_1) v_1}{\frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)}$$

$$\eta_P = \frac{2 v_1}{v_2 + v_1} = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}} = \frac{F_S v_1}{F_S v_m} > 1$$

$\Rightarrow F_S$ gegeben $\rightarrow \eta_P \uparrow$, wenn $v_2 - v_1$ klein bzw. A_P groß.

Impulsmomentensatz

Drehmoment ist für viele Prozesse wesentlich.

Impulsmomentensatz liefert z.B. z. B. zwischen Drehmoment und Drehimpuls

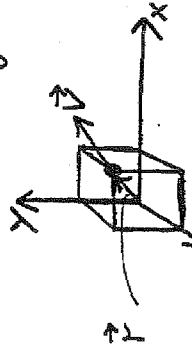
Herleitung mittels Bildung des Momentes des Impulsatzes.

$\vec{v}$: Teilchengeschwindigkeit
 ρ : Dichte, ΔV : infinit. Partikelvol.,
 $\Delta \vec{F}_P$: resultierende äußere Kraft

2. Newtonsches Gesetz

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \rho \Delta V) = \Delta \vec{F}_P$$

Moment bzgl. Ursprung



$$\vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v} \rho \Delta V) = \vec{r} \times \Delta \vec{F}_P$$

ob Wassersprung kann von Vorteil sein:
 • überkrit. Ström. im Umlaufkanal eines Standkanals $\rightarrow$ Beschädigung d. Abstromkanals mögl.
 Maßnahme: Wassersprung $\Rightarrow$ erheb. Dissipation $\rightarrow$ unterkrit. Ström.

- Bemerkg.: • Struktur d. Wassersprungs sehr komplex
- Wassersprung ebenfalls in anderen Querschnittsformen vorhanden

Laminare reibungsbehaftete Strömungen

Reibungseinflüsse von Bedeutung bei vielen Strömungsphänomenen

Tangentialspannungen $\rightarrow$ Reibg.

$\rightarrow$ Tangentialkräfte $\sim$ Zähigkeit

Zähigkeitsgesetz

Newtonsche Fluide

Nicht-Newtonsc. Fluide

reibungsbehaftete Strömungen

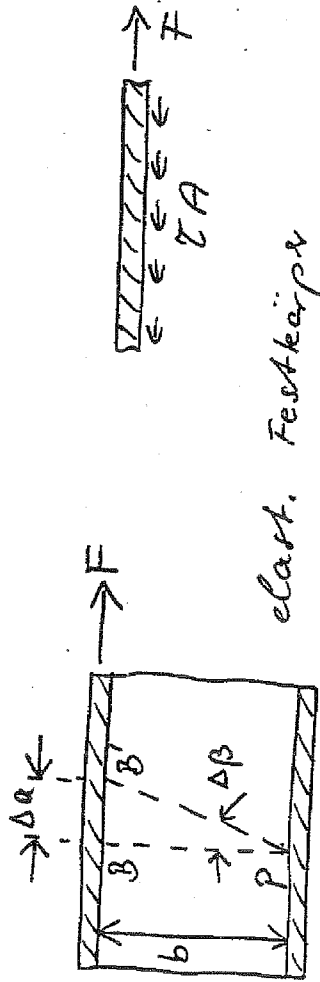
laminare Strömungen
 (geschichtet, geordnet)

turbulente Strömungen
 (ungeordnet, chaotisch)

$\downarrow$
 zusätzliche Reibgrößen

Viskosität

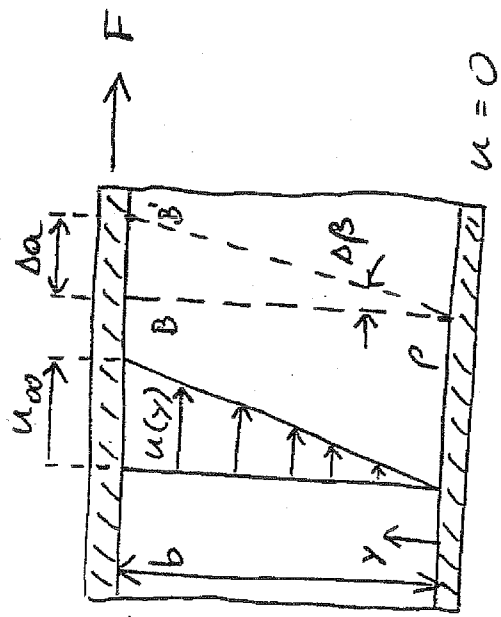
hypothetisches Experiment



elast. Festkörper

$$\tau \sim \Delta p$$

Festkörper wird durch Fluid ersetzt



$$u(y) = u_{\infty} \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{u_{\infty}}{b} = \text{konst.}$$

⇒ Überlegungen zur Zähigkeit

in Δt von IB nach IB'

$$\rightarrow \tan \Delta \beta \approx \Delta \beta = \frac{\Delta a}{b} = \frac{u_{\infty} \Delta t}{b}$$

$$u_{\infty} = f(F) \rightarrow \Delta \beta = h(F, t)$$

∴ Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t}$

$$\dot{\gamma} = \frac{u_{\infty}}{b} = \frac{du}{dy}$$

weitere Untersuchungen $\Rightarrow \tau \sim \dot{\gamma}$

$$\tau \sim \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \tau = \eta \frac{du}{dy}$$

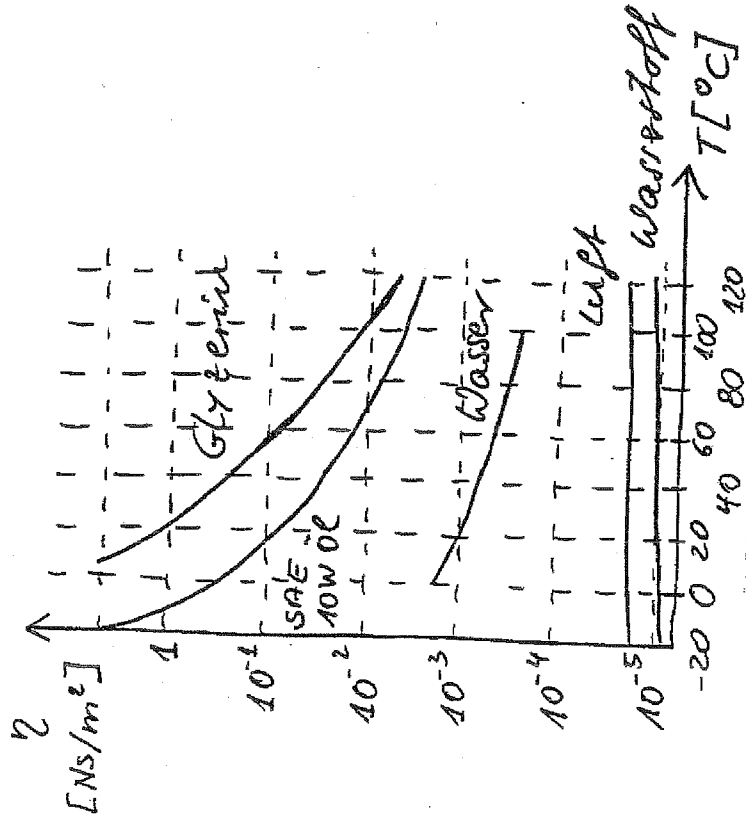
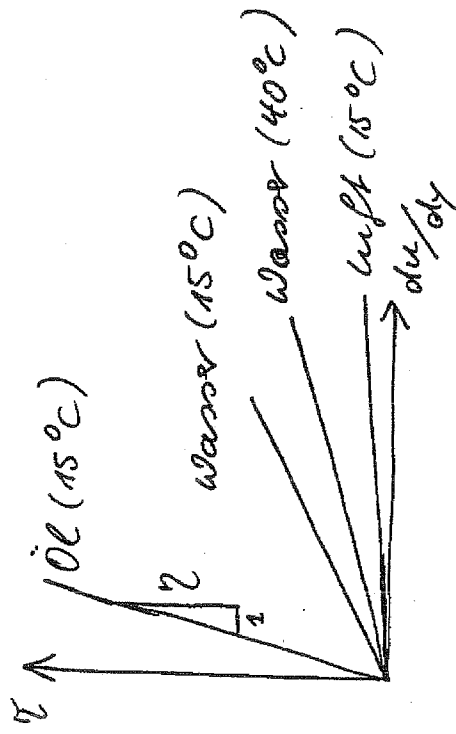
Proportionalitätskonst. η : dyn. Viskosität

$$\eta = f(T, \rho) \approx g(\text{Fluid}, T)$$

Einteilung d. Fluide anhand

$\eta = f(\frac{du}{dy})$ - Darstellung

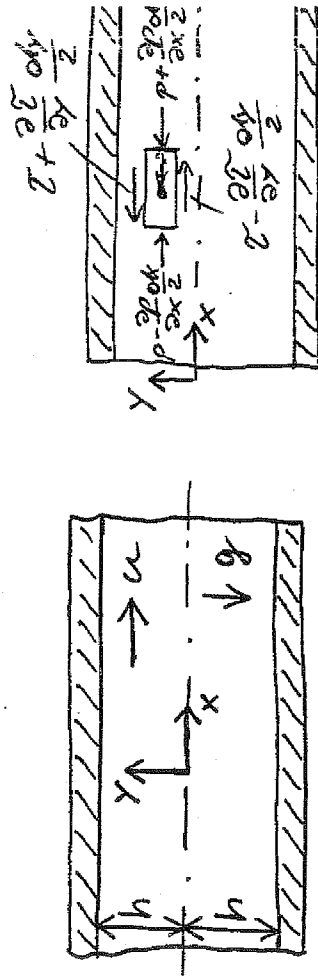
2 Ty Newton. element. ges. or. beweg.
 → Newtonsche od. nonnewtonsche Fluide



Stationäre Strömung zwischen parallelen Platten

Druckgrad. in x-Richtg. $\Rightarrow$ Strömen mit $u, v = 0$

$\Rightarrow$ Gleichgew. zw. Druck- und Reibungskräften



stationäre Ström. $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$; ΣF in x-1

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y + \left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x = 0$$

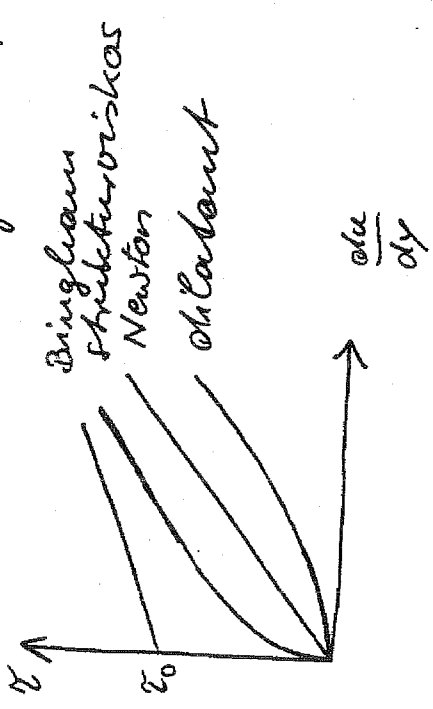
$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

mit $\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial y}$

neben $\gamma \rightarrow$ kinemat. Viskosität ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

Nicht-Newton'sche od. anomalvisk. Fluide
weichen vom Newton.-Element, ges ab.



Strukturviskos : $\frac{du}{dy} \uparrow \rightarrow \gamma \downarrow$

$\rightarrow$ Polymere $\rightarrow$ Latexfarbe

Scherdünnend : $\frac{du}{dy} \uparrow \rightarrow \gamma \uparrow$

$\rightarrow$ Treibsand

Bingham (Plastik): weder Fluid noch Festkörper

$\tau < \tau_0$: keine Bewegung $\Rightarrow$ kein Fluid
 $\tau > \tau_0$: Strömung $\Rightarrow$ kein Festk.
 $\rightarrow$ Zahnpasta Mayonnaise

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (*)$$

ΣF in y -Richtung.

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \rho g dx dy = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0$$

bzw. $p = -\rho g y + f_1(x)$

Bestimmung von $u(y)$:

Integr. v. Glg. (*): $-\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1 \quad \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

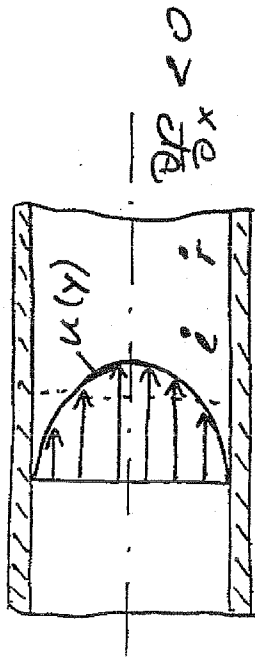
$$u(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Randbedgn. : $y = \pm h \quad u = 0$

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} \pm C_1 h + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2}$$

$$u(y) = \frac{1}{22} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2)$$



$$q = \frac{\dot{Q}}{b} = \int_{-h}^h u(y) dy = \int_{-h}^h \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) dy$$

$$q = -\frac{2h^3}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) > 0$$

es sei

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Rightarrow q = \frac{2h^3 \partial p}{3\eta \ell}$$

mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u(y) b dy = \frac{q}{2h} = \frac{h^2 \partial p}{3\eta \ell}$$

max. Geschwindigkeit $u_{\max} = u(y=0)$

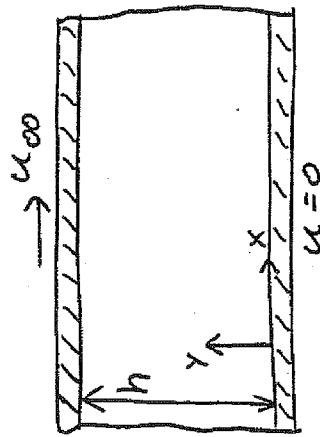
$$u_{\max} = -\frac{h^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u_{\max} = \frac{3}{2} \bar{u}$$

D.h. $\frac{\partial p}{\partial x}$, η , h bekannt $\Rightarrow$

$u(y)$, $\bar{u}$, $u_{\max}$, q

Couette Strömung



Randbedingungen:

$$y=0 \quad u=0$$

$$y=h \quad u=u_{\infty}$$

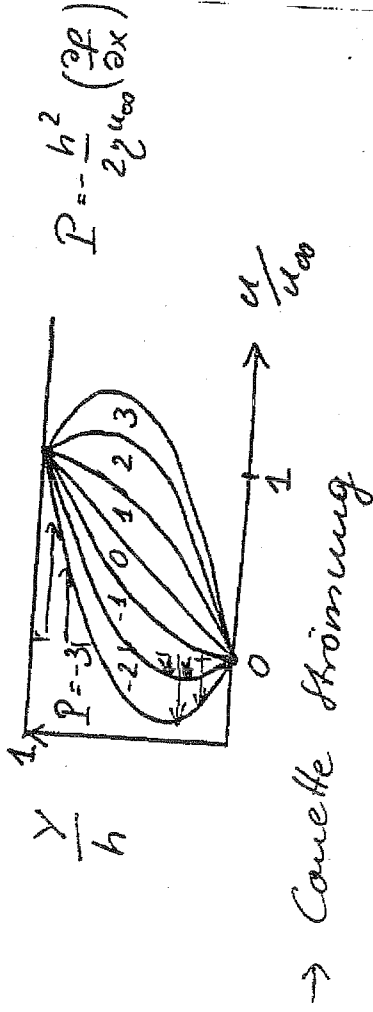
$$\Rightarrow C_1 = \frac{u_{\infty}}{h} - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h$$

$$C_2 = 0$$

$$\rightarrow u(y) = u_{\infty} \frac{y}{h} + \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - hy)$$

$$\frac{u(y)}{u_{\infty}} = \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\eta u_{\infty}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

abhängig i. w. von $\frac{dp}{dx}$ folgt $u(r)$

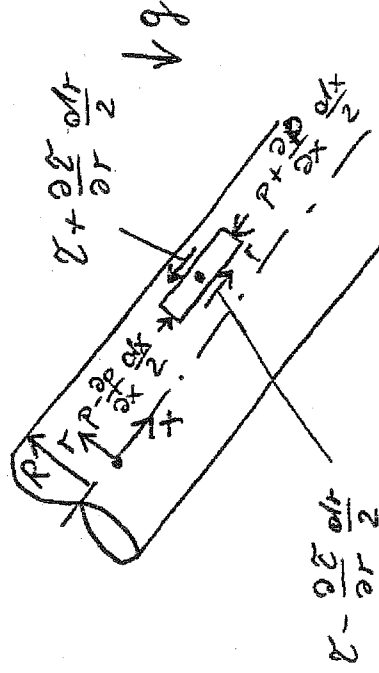


$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{u}{u_{\infty}} = \frac{y}{h}$$

Bemerkg.: Simulation durch
2 konzent. aufgeschobene
Zyl. mit $h \ll R_i$

Stationäre Strömung in Rohren mit Kreisquerschnitt

parallel zur Rohrwand $v = w = 0$
stationär $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$, achsensym. $\frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow 0$
 $\Rightarrow u = f(r)$



ΣF in x-Richtung

$$\begin{aligned} & \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) 2\pi r dr + \\ & \left(r - \frac{\partial r}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) dx - \left(r + \frac{\partial r}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) dx \\ & + \rho g \sin \alpha 2\pi r dr dx = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} + \rho g \sin \alpha = 0$$

$$\text{bzw.} \quad -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tau \right) + \rho g \sin \alpha = 0$$

Integr. in rad. Richtg.

$$\tau = -\left(\frac{\rho g}{2}\right) + \rho g \sin \alpha \frac{r}{2} + C_1/r$$

$$\text{mit } \tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$u = \frac{r^2}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right] - \frac{C_1}{2} \ln r + C_2$$

Randbedg.

$$r=0 \quad u: \text{endlich}$$

$$r=R \quad u=0$$

$$r=0 \Rightarrow C_1=0, \text{ denn } \ln(0) = -\infty$$

$$r=R \Rightarrow C_2 = -\frac{R^2}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right]$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{1}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right] (r^2 - R^2)$$

Volumenstrom $\dot{Q}$

$$\dot{Q} = 2\pi \int_0^R u(r) r dr$$

$$\dot{Q} = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right]$$

es sei

$$\frac{\Delta p}{l} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left[\left(\frac{\Delta p}{l} \right) + \rho g \sin \alpha \right]$$

$$\boxed{\dot{Q}(\alpha=0) = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}}$$

Poiseuille,
Hagen
z 1840

Hagen-Poiseuille Gesetz d. Rohrstöög.

$$\text{mittlere Geschw. } \bar{u} = \frac{\dot{Q}}{\pi R^2}$$

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\eta} \left[\left(\frac{\Delta p}{l} \right) + \rho g \sin \alpha \right]$$

$$\text{max. Geschw. } u_{\max} = u(r=0)$$

$$u_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \left[\left(\frac{\Delta p}{l} \right) + \rho g \sin \alpha \right] = 2\bar{u}$$

bzw. $\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$

Vuachläsigg. d. Gravitation

$$\tau = - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2}$$

→ Wandelchubspannung τ_w

$$\tau_w = \frac{R}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Betrachtungen zur Rohrreibung ($\alpha=0$)

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2}} = \frac{8 \tau_w l}{R^2 \frac{\rho \bar{u}^2}{2}} = \frac{64}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2}} \frac{l}{D} \frac{1}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2}} \frac{l}{D}$$

Hagen, Poiseuille

$$\frac{8 \tau_w}{\rho \bar{u}^2} = \frac{64}{Re}$$

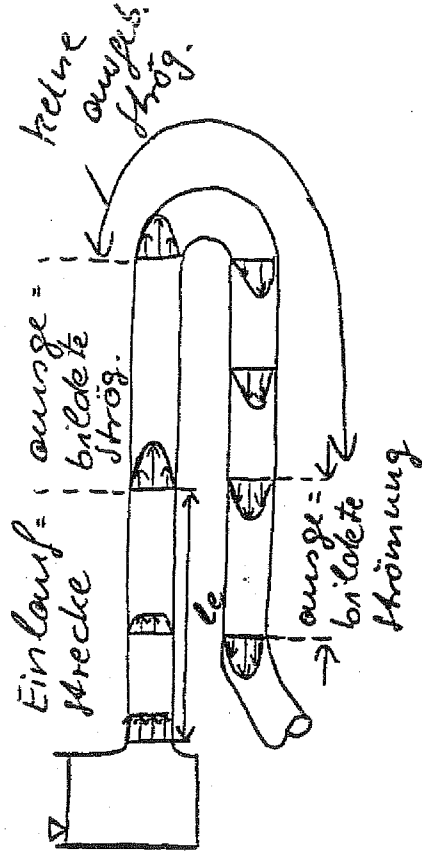
$Re = \frac{\rho \bar{u} D}{\eta} \rightarrow$ Reynolds Zahl

man definiert d. Rohrreibungszahl λ

$$\lambda = \frac{8 \tau_w}{\rho \bar{u}^2} = \frac{64}{Re} \quad \left(\begin{array}{l} \text{lamm.} \\ \text{ström.} \end{array} \right)$$

Rohreinlaufstrecke ausgebildete Ström.

Einlaufstrecke: Bereich, in dem d. Fluid in das Rohr eintritt



Einlaufstrecke l_e : Strecke zur Umwandlung d. Rechteckprofils in ausgebildete Ström.

ausgebildete Ström.: $u \neq f(x)$

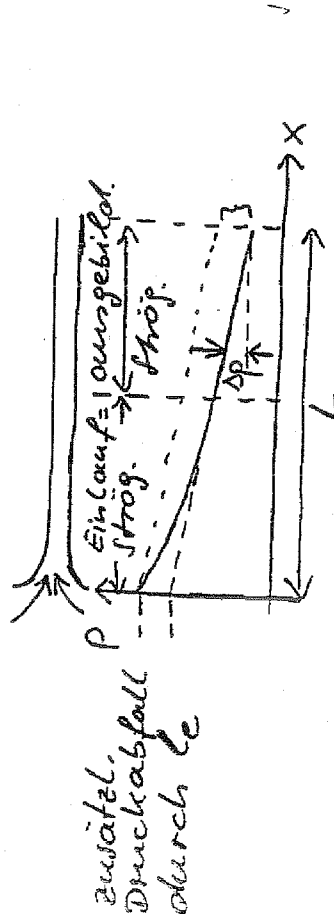
$$\frac{l_e}{D} = f(Re) \rightarrow \frac{l_e}{D} = 0.06 Re \quad \left(\text{lamm.} \right)$$

$$l_{e, \text{urb.}} < l_{e, \text{lamm.}}$$

Einlaufstrecke bedingt ^{zusätzlichen} Druckverlust $\rightarrow$ Verlustbeiwert ξ_e : ξ_e

$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = \lambda \frac{L}{D} + \xi_e$$

$\uparrow$ Einlaufstrecke
Rohr bei ausgebild. Ström.



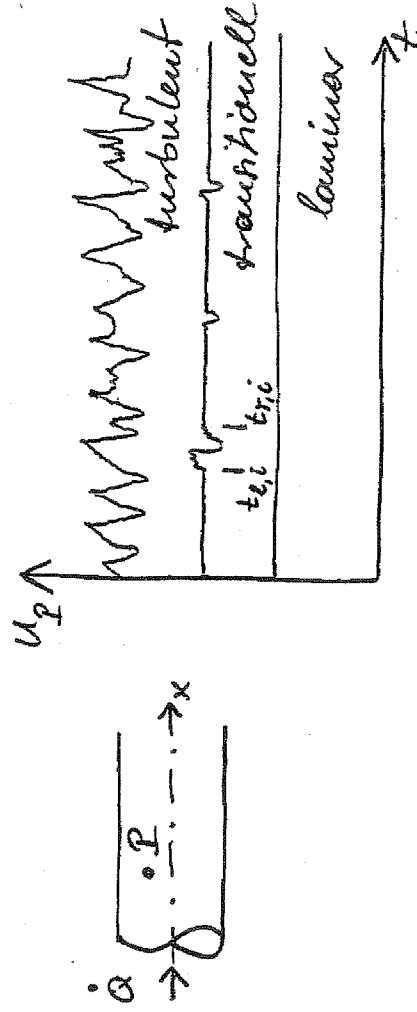
Lam. Ström. durch kreisförmige Rohre

$$1.12 \leq \xi_e \leq 1.45 \quad (\text{Experiment})$$

Turbulente Rohrströmung

Strömung $\rightarrow$ laminar
 $\rightarrow$ transitionell
 $\rightarrow$ turbulent

zeitl. Verhalten im Punkt I



laminar: $u_p = \text{konst.}$, $v_p = 0$

transitionell: $\dot{Q}_{tr} > \dot{Q}_{lam}$;

$$u_p = f(t) \quad t \in [t_{e,i}, t_{r,i}]$$

$$u_p = \text{konst.} \quad \text{sonst}$$

turbulent: $\dot{Q}_{turb} > \dot{Q}_{tr}$;

$$u_p = f(t), \quad v_p \neq 0$$

strömform = $f(u, s, z, D) \rightarrow g(Re)$

Übergang lam. - turb. = $f(\text{Geometr.})$

d. Einlauf, Oberflächen =
Beschaffenheit, Rohrabr.

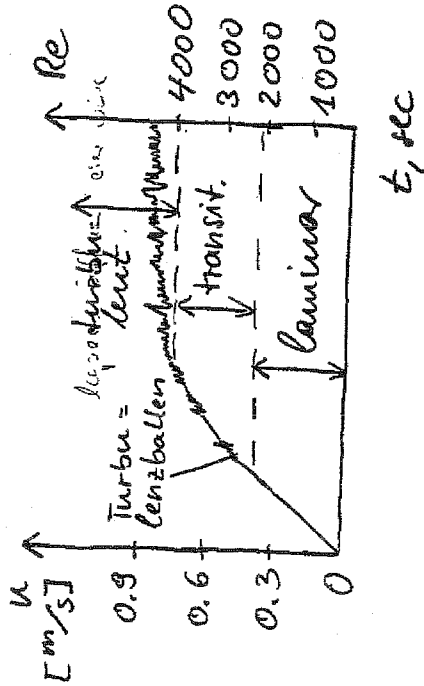
Richtwerte für d. Strömungsbereiche
(kreisförmige Rohre):

$Re \leq 2100$ laminar

$2100 < Re < 4000$ transitionell

$4000 \leq Re$ turbulent

mögl. Exp. zur Realisation



Turbulente Strömung

chaotische und zufällige
Schwankungsbewegungen
kennzeichnen turb. Strömungen;

Auflösung aller Skalen ist un-
möglich

$\Rightarrow$ Beschreibg. durch gemittelte
Größen

$\rightarrow$ zeitliche Mittelung nach
Reynolds

Berechnung nach Reynolds
(f : beliebige Strömungsgröße)

$$f = \bar{f} + f'$$

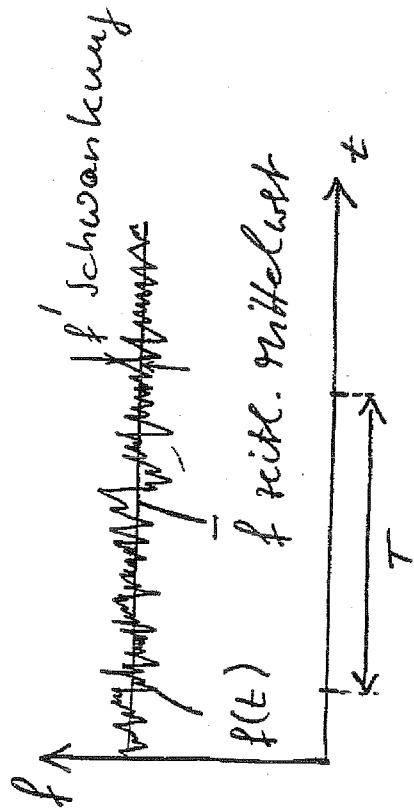
wobei

$$\bar{f} = \bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, y, z, t) dt \quad \text{zeitl. Mittelwert}$$

f' : Schwankungsteil

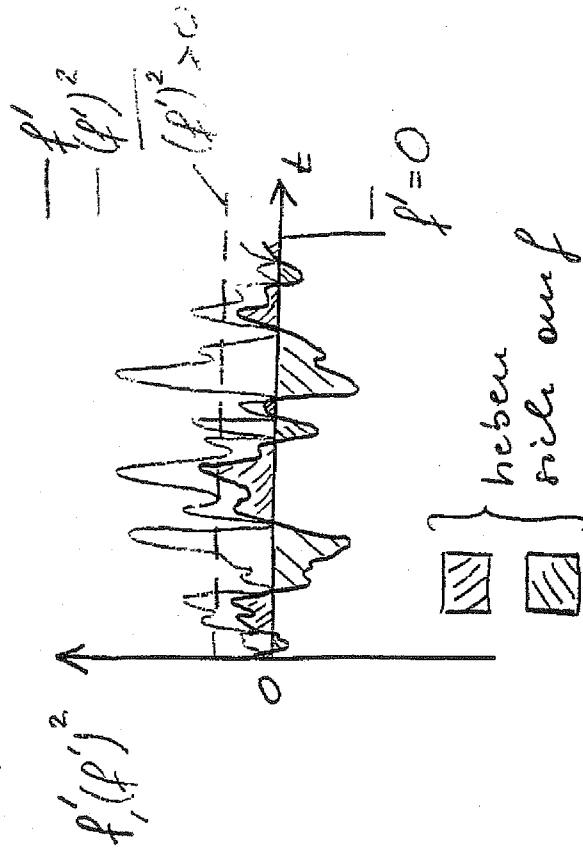
$T \gg$ Schwankungsdauer

$T \ll$ Instationszeit



Es ist

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \underbrace{(f - \bar{f})}_{= f'} dt = \frac{1}{T} \left[\int_t^{t+T} f dt - \bar{f} \int_t^{t+T} dt \right] \\ &= \frac{1}{T} [T\bar{f} - \bar{f}T] = 0 \end{aligned}$$



$$\overline{(f')^2} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (f')^2 dt > 0$$

ebenso

$$\overline{f'g} \geq 0 \quad (\text{i. a.})$$

$$\overline{f'g} = 0$$

weitere Operationen

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}, \quad \overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} \quad \overline{f \cdot g} \neq \overline{f} \cdot \overline{g}$$

$$\overline{\int f dy} = \int \overline{f} dy$$

Maß für d. Turbulenz

→ Turbulenzgrad Tu

$$Tu = \frac{1}{u_\infty} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}$$

isotrope Turbulenz

$$u' = v' = w'$$

$$\Rightarrow Tu = \sqrt{\overline{u'^2}} / u_\infty$$

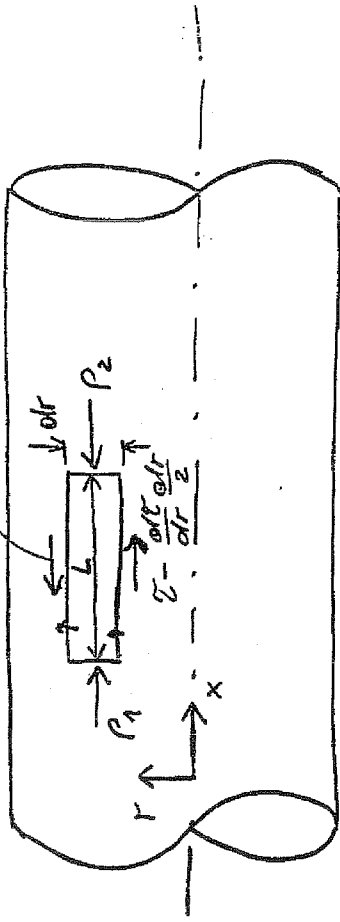
Windkanäle:

$$2 \cdot 10^{-4} \leq Tu \leq 10^{-2}$$

Analyse der turbulenten Rohrströmung

- Impulsatz
- mittl. Mittelung

$$r + \frac{dr}{dr} \frac{dr}{2}$$



Imp. satz mittl. gemittelt

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_{KV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \right] dt =$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\vec{F}_p + \vec{F}_R) dt$$

mit

$$\vec{v} = (\bar{u} + u') \vec{e} + v' \vec{f}$$

Druckkräfte

$$\text{Zi. Bilanz} \Rightarrow (p_1 - p_2) 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^r [(p_1 - p_2) 2\pi r dr] dt = (p_1 - p_2) \pi r^2$$

Reibungskräfte

$$\text{Zi. Bilanz} \Rightarrow -2\pi L d(r\tau) \quad (\text{vgl. lamin. Rohrström.})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^r [-2\pi L d(r\tau)] dt = -2\pi r L$$

lok. Beschlegg.

$$\text{stationär} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial \bar{f}'}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}'}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{f}' = \int_{v'}^{u'}$$

Impulsfluß durch KF

Impulsbilanz am Element

$$\text{liefert für} \quad \int_{KF} \bar{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

$$- \int (\bar{u} + u') (\bar{u} + u') 2\pi r dr + \int (\bar{u} + u') (\bar{u} + u') 2\pi r dr -$$

$$\int \left[(\bar{u} + u') v' - \frac{d(\bar{u} + u') v'}{dr} \frac{dr}{2} \right] 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) L +$$

$$\int \left[(\bar{u} + u') v' + \frac{d(\bar{u} + u') v'}{dr} \frac{dr}{2} \right] 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) L$$

$$= \int 2\pi L d(r(\bar{u} + u') v')$$

$$r(\bar{u} + u') v'$$

$$\Rightarrow \int_0^T \int_0^r 2\pi L d(r(\bar{u} + u') v') = \int_0^T 2\pi L r \overbrace{(\bar{u} + u') v'}^{dr} \Big|_0^r$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} v' dt = 0 \quad \frac{1}{T} \int_0^T u' v' dt \neq 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^r 2\pi L r (\bar{u} + u') v' dt = \int_0^T 2\pi L r \overline{u' v'}$$

Zusammenfassung aller Terme

$$(2\pi r L) \overline{g u' v'} = (p_1 - p_2) \pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$$

67W.

$$\underline{\underline{(p_2 - p_1) \frac{r}{2L} = - \overline{g u' v'} + \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}}}$$

$-\overline{gu'v'}$: turbulente Schubspg. τ_t

$$\Rightarrow \tau = -\overline{gu'v'} + \eta \frac{du}{dr} = \tau_t + \tau_e$$

da $\tau_t > 0 \rightarrow \tau > \tau_e$

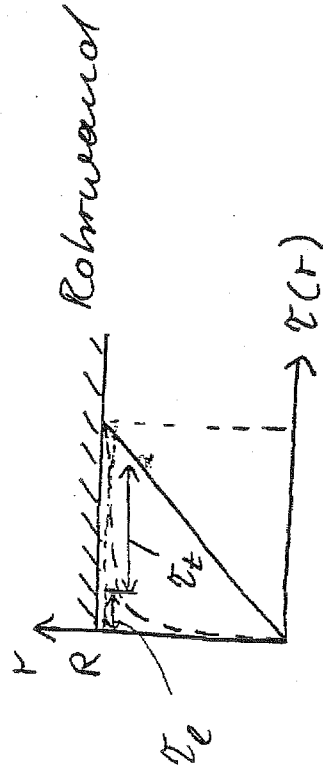
Kräftegleichgewicht in differentieller Zellen

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau) = 0$$

$p = f(x), \tau = f(r) \rightarrow \text{konst.} + \text{const.} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau) = \text{const}$$

bzw. τ linear in r



viskose Unterschied: molekular
Schubspg. wesentl.

äußere Schicht: turb. Schubspg. $\tau_t \gg ?$
 $\rightarrow \tau_t \approx (100 \div 1000) \tau_e$

Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils $u(r)$ nur möglich, wenn

u', v' bekannt

Glg. für $-\overline{gu'v'}$?

Prandtl'sche Mischungsweghypothese

Reynold'sche Ansatz $\Rightarrow -\overline{gu'v'}$
als neue unbekannte Variable

$\Rightarrow$ zu wenig Gln. zur Lösg.!

zur Schließung d. Systems wird eine zusätzliche Gleichung benötigt.

Schließung: Zshg. zwischen
d. gemittelten und d. Schwankungs-
größen wird postuliert.

lamin. Strög.: $\epsilon_l = 2 \frac{\overline{u^2}}{\partial y}$

turb. Strög.: $\epsilon_t = -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$
(Boussinesq)

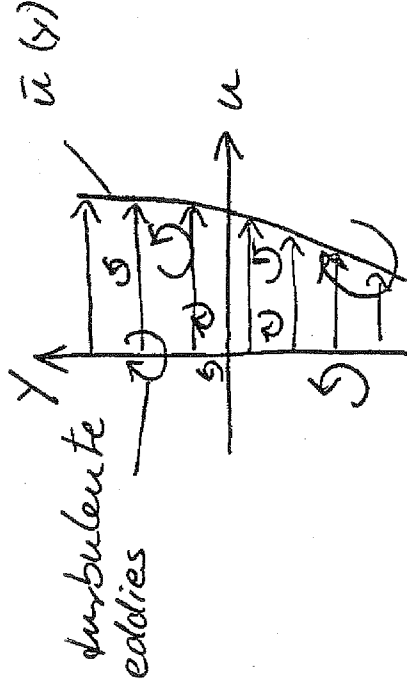
ν_t : turb. od. scheinbare od. Wirbel-
viskosität

Turbulenz (Bild d. Struktur):

Kaskade d. Wirbel $\rightarrow$ kleine
Wirbel in d. Größe d. Partikel
bis hin zu großen Wirbeln
mit Durchmesser d. charakter-
ist. Länge.

Wirbelbeweg. ist zufällig;

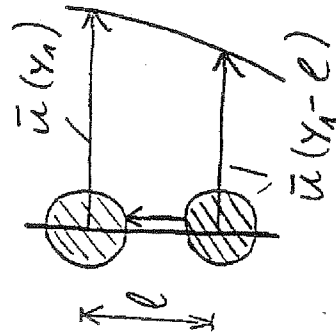
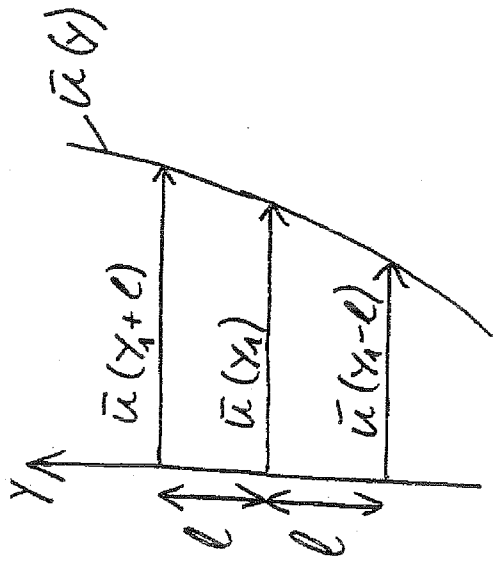
Massentransport mit $\bar{u}$
 $\Rightarrow$ gesteigerte Imp. austausch
 $\Rightarrow \epsilon_t > \epsilon_l$; ν_t keine Stoffgröße



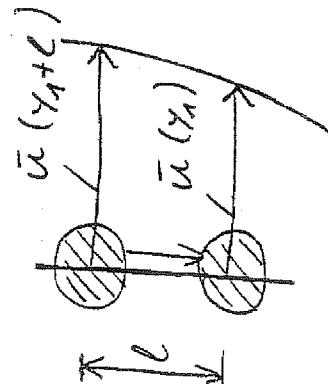
gesucht: $\nu_t = f(\bar{u}, \bar{v})$

Ansatz von Prandtl:

turbulente Grenzschicht enthält
Strömungsballen; diese bleiben
eine gewisse Zeit bestehen.



$$\rightarrow \Delta u_- = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - \ell) \approx \ell \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y_1}$$



$$\rightarrow \Delta u^+ = \bar{u}(y_1 + \ell) - \bar{u}(y_1) \approx \ell \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y_1}$$

$\Delta u_-, \Delta u^+$: turb. Schwankungen.

$$\overline{|u'|} = \frac{1}{2} (|\Delta u_-| + |\Delta u^+|) = \ell \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y_1}$$

ℓ : Mischungsweg (Prandtl)

$$v' \sim u' \Rightarrow \overline{|v'|} = \text{konst.} \cdot \overline{|u'|}$$

$$= \text{konst.} \cdot \ell \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

Zusammenhang: $\overline{u'v'}$ und $\overline{|u'|}$ und $\overline{|v'|}$

$$v' > 0 \rightarrow u' < 0 \text{ (i. a.)}$$

$$v' < 0 \rightarrow u' > 0 \text{ (i. a.)}$$

$$\Rightarrow u'v' < 0$$

$$\Rightarrow \overline{u'v'} = \uparrow \text{konst.} \cdot \overline{|u'|} \cdot \overline{|v'|} = - \text{konst.} \cdot \ell^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

const. $l^2 = \sqrt{\nu} l \sqrt{u} l = \hat{l}^2$
 $l \equiv \hat{l}$

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \underbrace{\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|}_{\tau_t} = \tau_t \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Prandtl'sche Mischungsweghypothese

häufig: $l = f(\text{charakt. Länge})$
 $\rightarrow$ Lösung möglich

Universelles Wandgesetz

Imp. satz d. Rohrströmung

$$\frac{p_1 - p_2}{2L}(R - y) = 2 \frac{d\bar{u}}{dy} + \underbrace{\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|}_{\text{-----}}$$

mit $y = R - r$

Geschw. verteilg. nicht direkt mittels
 Integration zu bestimmen
 $\rightarrow$ Annahmen bzgl. τ_t und τ_t

gesucht: $\bar{u}(y)$

es ist $y_* \ll R$!

$y > y_*$: • turb. Zone $\gg$ Trägheitszone
 lam. Spström

• $\tau_t \stackrel{!}{=} \text{konst} \stackrel{!}{=} \tau_w = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$
 für $0 < y < y_*$

Ansatz für l : $l = \kappa y$, wobei

$\kappa = 0.4$ aus Exp.

$$\rightarrow \tau_w = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

Annahme: $\bar{u} = \bar{u}(y, \tau_w, \nu, \gamma)$

$$\kappa y \frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = u_* \quad \text{Schubspann- geschw.}$$

$$\frac{1}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y}$$

Integration $\Rightarrow$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C_1 \quad \text{für } y > y_*$$

C_1 aus Anpassung von $\bar{u}|_{y=y_*}$
an $\bar{u}|_{y < y_*}$

$y < y_*$ (zähe Unterschicht):

$$\tau_w = \tau \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\tau_w}{\tau} = u_*^2 = \tau \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\tau}$$

y_* aus $\bar{u}(y=y_*)/u_* = \text{konst} = C_2$

$$y_* = C_2 \frac{\tau}{u_*}$$

Mit $\bar{u}_* = \bar{u}(y=y_*)$ im $\ln$ -Gesetz

$$\frac{\bar{u}_*}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y_* + C_1 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\tau C_2}{u_*} \right) + C_1$$

$$\frac{\bar{u}_*}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\tau}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln C_2 + C_1 \Rightarrow \underline{\underline{C_1}}$$

bzw.

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\tau}{u_*} + \underbrace{\frac{\bar{u}_*}{u_*} - \frac{1}{\kappa} \ln C_2}_{C_1}$$

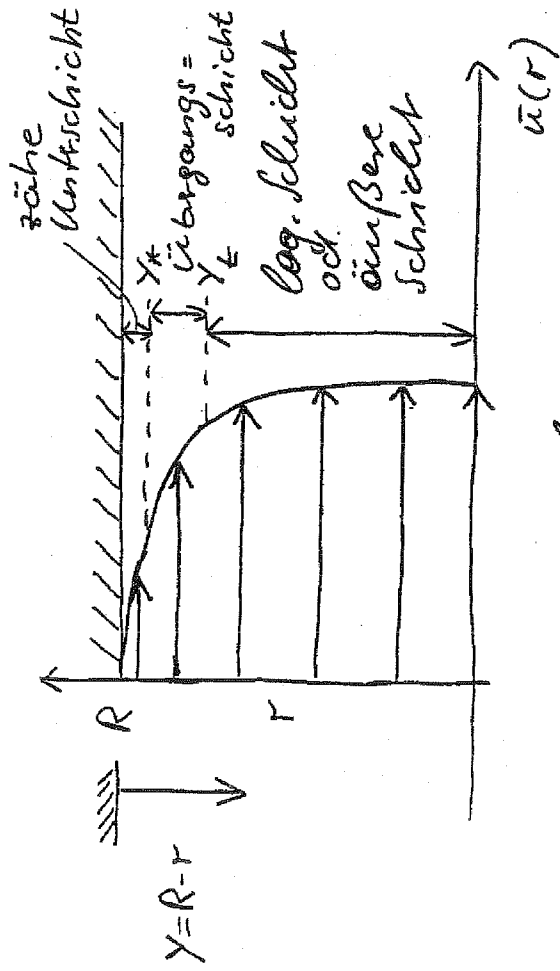
$$\boxed{\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_*}{\tau} + C_1}$$

universelle Wandgerade für
turb. Ströme.

$\kappa = 0.4$, $C = 5.5$ (Exp., glatte Rohre)

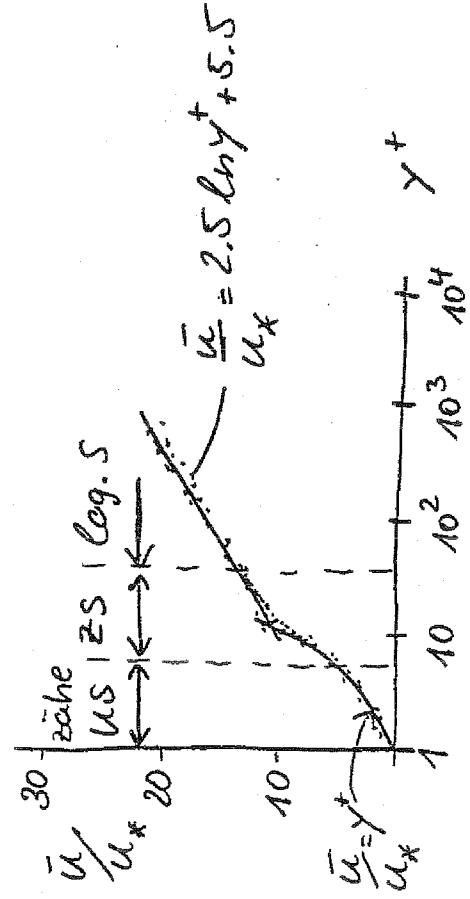
$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln y^+ + 5.5$$

Schemat. Darstellung von $\bar{u}(r)$



Darstellung in dim. loss Form

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = f(y^+)$$



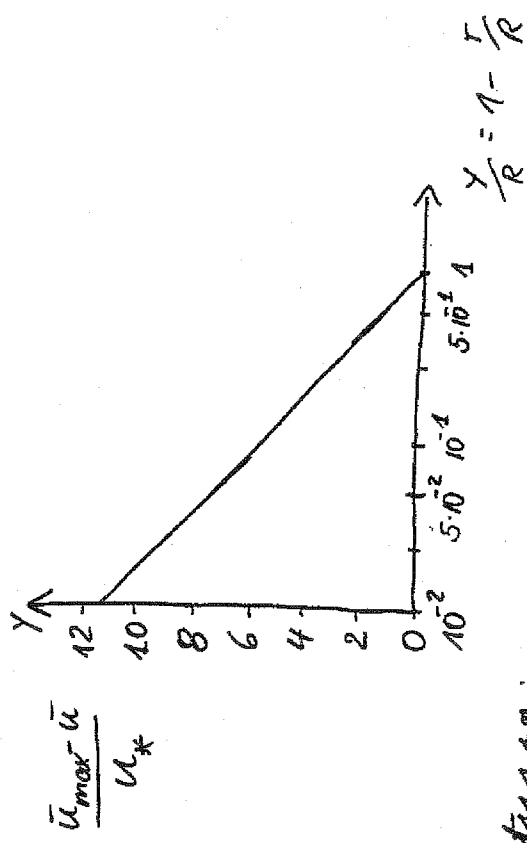
Bemerkg.: Experimente zeigen, daß d. universelle Wandgesetz gültig ist für,

$$y_* < y \leq R$$

mit d. max. Geschw. $\bar{u}_{max} = \bar{u}(y=R)$

$$\bar{u}_{max} = u_* \left[2.5 \ln \frac{R u_*}{y} + G \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_{max} - \bar{u}}{u_*} = -2.5 \ln \frac{y}{R} = -2.5 \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$



Ableitung:
 $r \rightarrow R \quad \frac{\bar{u}_{max} - \bar{u}}{u_*} \rightarrow \infty$

mittler Durchströmgeschw. $\bar{u}_m$

$$\bar{u}_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi \bar{u}(r) r dr$$

$$\bar{u}_m = 2 \int_0^1 \left[\bar{u}_{max} + \bar{u}_* \ln\left(1 - \frac{r}{R}\right) \right] \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$\bar{u}_* = u_* 2.5$$

Integral d. ln-Term

$$\text{mit } \frac{y}{R} = 1 - \frac{r}{R}$$

$$-\int_1^0 \ln\left(\frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) + \int_1^0 \frac{y}{R} \ln\left(\frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) =$$

$$-\left[\frac{y}{R} \left(\ln\left(\frac{y}{R}\right) - 1 \right) \right]_1^0 + \left[\left(\frac{y}{R} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y}{R}\right) - \frac{1}{4} \right) \right]_1^0 = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_m}{u_*} = \frac{\bar{u}_{max}}{u_*} - 3.75 \quad (\text{theoretisch})$$

experimentell ermittelt

$$\frac{\bar{u}_m}{u_*} = \frac{\bar{u}_{max}}{u_*} - 4.07$$

Universalles Widerstandsgesetz

in techn. Anwendungen ist d. Strömungswegl. Verlust entscheidend

$$\rightarrow \text{bshg. } \lambda = f(Re)$$

Definition v. λ

$$\lambda = \frac{8 \bar{u}_m^2}{\bar{u}_*^2} = 8 \frac{u_*^2}{\bar{u}_m^2}$$

es ist

$$\frac{\bar{u}_m}{u_*} = \frac{\bar{u}_{max}}{u_*} - 3.75$$

$$\frac{\bar{u}_m}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{R u_*}{y}\right) + 1.75$$

$$\text{mit } \bar{u}_m / u_* = \sqrt{P/\lambda}$$

$$\frac{R u_*}{y} = \frac{u_*}{\bar{u}_m} \frac{\bar{u}_m 2R}{y} \cdot \frac{1}{2} = Re \sqrt{\lambda} \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln(Re \sqrt{\lambda}) + \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{1.75}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.884 \ln(Re \sqrt{\lambda}) - 0.313$$

bzw. da $\ln(x) = \log(x) / \log(e)$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0.913$$

Anpassung d. Konst. durch Exp.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8}$$

universelles Widerstandsgesetz
 vollturb. Strög., kreisförmige Rohre,
 hydraulisch glatt.

empirische Näherung v. Blasius

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}}$$

Turbulente Strömung durch rauhe

Rohre

Strömungsmech. Verluste in turb.
 Strög. = f (Oberflächengüte)

turb. Strög. $\rightarrow$ Zähne Ausschleif

$$\gamma_* / D < 1$$

Größe d. Rauigkeit $\rightarrow \gamma_*$

$\rightarrow$ Verluste = f (Wandrauigkeit)

Maß für d. Wandrauigkeit

Bezeichnung rauhe oder glatt

abhängig von

$$\frac{\text{Rauheitshöhe}}{\text{Dicke d. Grenzschicht}} = \frac{k}{\delta}$$

$$\text{bzw. mit } \gamma_* \sim \frac{\nu}{u_*} \quad \frac{k}{\delta} \sim \frac{k u_*}{\nu}$$

$k < \gamma_*$: hydraulisch glatte Rohre

$\gamma_* = f(Re) \Rightarrow$ Rohrreibungszahl $= f(k)$

$k > \gamma_*$: vollkommen rauhe Rohre

vollkommen raube Strömung
durch kreisförmige Rohre

$$\lambda = f\left(\frac{u_s}{R}\right) \quad \text{von Kármán}$$

u_s : Stoßkantenrauheit

Voraussetzung $\frac{u_*}{v} \sim \frac{1}{u_s}$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_m}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{R}{u_s}\right) + 4.75$$

mit $\lambda_f = \left(\frac{u_*}{\bar{u}_m}\right)^2$

$$\lambda = \frac{8 \bar{u}_m}{g \bar{u}_m^2}$$

angepasste Konst.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.884 \ln\left(\frac{R}{u_s}\right) + 1.679$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log\left(\frac{D}{u_s}\right) + 1.067$$

experimentelle Anpassung.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log\left(\frac{D}{u_s}\right) + 1.14}$$

quadrat. Abstandsgesetz f. λ ,
vollkommen raube Rohre,
kreisf. Querschnitt

Überschneidung zw. glatt u. raub

Colebrook auf d. Basis von Mess-
daten v. Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log\left(\frac{u_s/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 2.0 \log\left[\frac{Re \sqrt{\lambda}}{1 + 0.1 \left(\frac{u_s}{D}\right) Re \sqrt{\lambda}}\right] - 0.8}$$

gültig im gesamten nichtlam. Geb.

$u_s \rightarrow 0$: hydraul. glatte Rohre

$Re \rightarrow \infty$: vollkommen raube Rohre

die natürliche Rauheit in d. Praxis
wird anhand v. Tab. auf die
Größe u_s umgerechnet

$\Rightarrow \lambda$ -Werte Moody-Diagramm be-
stimmbar

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

laminar

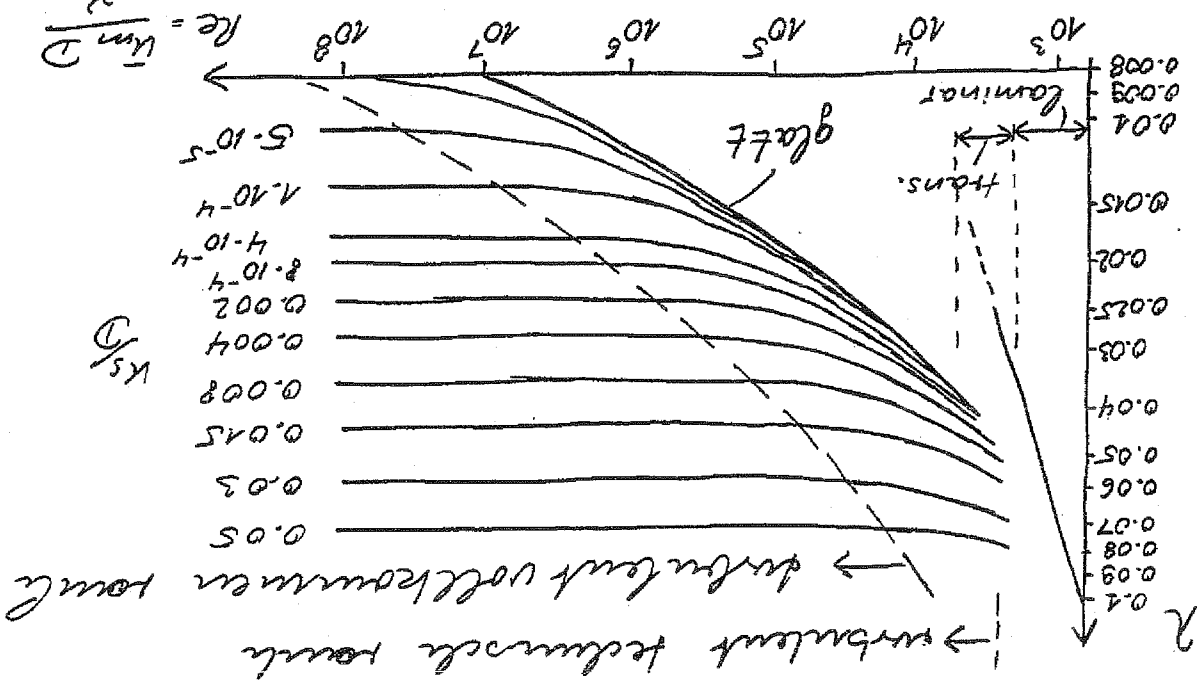
$$\frac{1}{\lambda} = 2.0 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8$$

$$\lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}} \quad (\text{Nhg.})$$

$$\frac{1}{\lambda} = -2.0 \log \left(\frac{k_s}{D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = 2.0 \log \left(\frac{k_s}{D} \right) + 1.14$$

turb. glatt
turb. tech. rough
turb. vollr. rough



Ähnlichkeitstheorie

Realistische Probleme sind
oft nur durch exakte Lösungen
oder Erklärungsleistungen zu
beschreiben.

⇒ Lösg. mittels Numerik oder
Experiment

Experiment: - Planung

- Übertragbarkeit
d. Ergebnisse

→ Ähnlichkeitstheorie

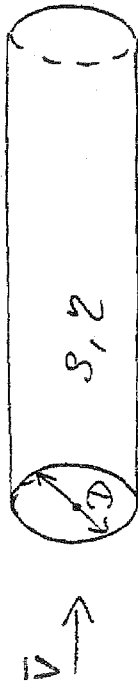
Ähnlichkeit: Beziehung zwischen
Modell und Real:
ausführung

2 Methoden: - Dimensionsana-
lyse

- Meth. d. DGL

Dimensionsanalyse

Pipeline - Problem:



stationär,
inkomp.

Druckverlust pro Einheitslänge Δp_e ?

Planung d. Experiments $\rightarrow$

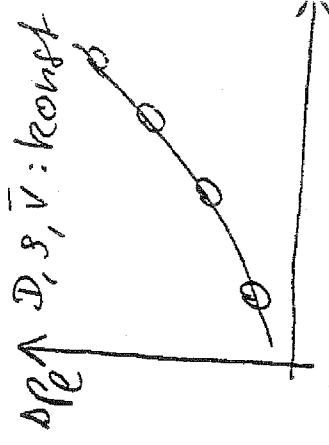
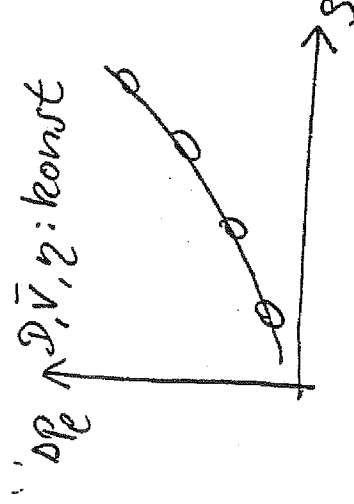
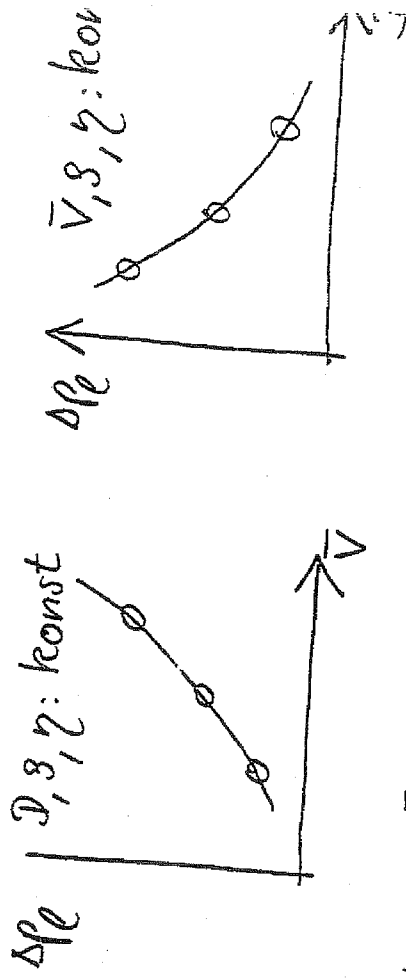
$$\Delta p_e = f(?)$$

hier: $\Delta p_e = f(D, s, z, \bar{V})$

$f(\dots)$ mittels Exp. best.!

Exp. d. Form: $\Delta p_e = f(x_1)$ mit

x_1, x_3, x_4 konst.

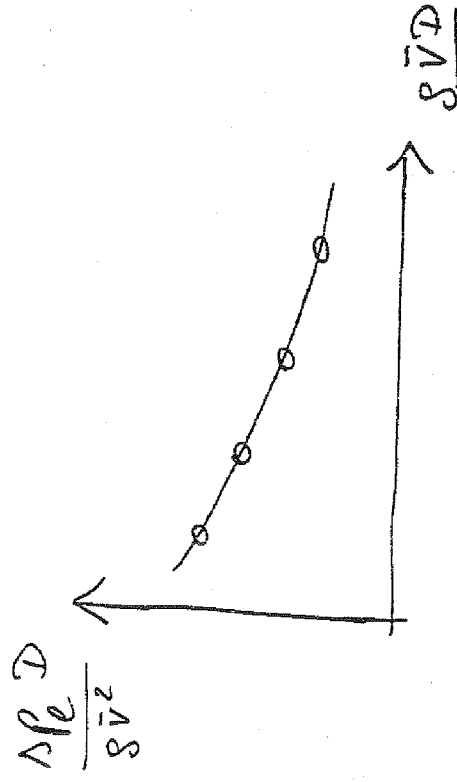


Bestg. v. $\Delta p_e = f(D, z, s, \bar{V})$ aufwena
und schwierig;

Daten liefern nicht automa
tisch $f(\dots)$.

Ausweg: Bestimmung von
Kennzahlen (dimensionslose
 Parameter)
 aus $S, \bar{v}, D, \bar{v}$.

hier: $\frac{\Delta p_{\ell} D}{S \bar{v}^2} = \phi \left(\frac{S \bar{v} D}{\eta} \right)$



$\Rightarrow$ 1 Kurve aus d. Exp.;
 Exp.: einfacher und
 kostengünstiger

Wie gelangt man zu

$$\frac{\Delta p_{\ell}}{S \bar{v}^2} = \phi \left(\frac{S \bar{v} D}{\eta} \right) ?$$

Basis: Dimension d. Variable
 $\Rightarrow$ qualitative Beschreibg.
 d. Problems

Basisdimensionen:

M : Masse, L : Länge, T : Zeit

Pipeline-Problem:

$$\Delta p_{\ell} \left[\frac{M}{T^2 L^2} \right], D [L], S \left[\frac{M}{L^3} \right],$$

$$\bar{v} \left[\frac{L}{T} \right], \eta \left[\frac{M}{L T} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p_{\ell} D}{S \bar{v}^2}, \frac{S \bar{v} D}{\eta} : \text{dimensionslos}$$

Mittels Dimensionsanalyse wird d. Anzahl d. Var. reduziert.

Grundlage d. Dimensionsanalyse:

Lyse ist d. **Kennzahl** - oder

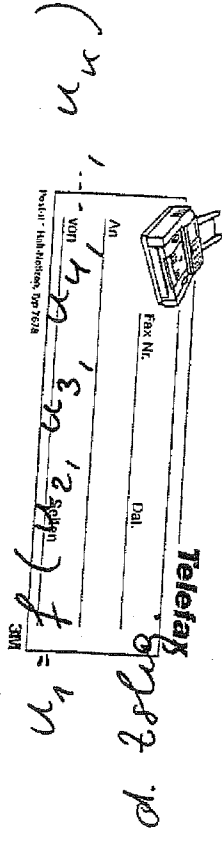
PI-Theorem von Buckingham.

$\Rightarrow$ # d. nötigen dimensionsl. Par.

PI-Theorem: Sofern eine Gleichung mit k Variablen bezüglich der Dimensionen homogen ist, kann sie auf eine Beziehung mit $k-r$ unabh. dimensionslosen Variablen reduziert werden, wobei r d. min. Anzahl von Referenzgr. entspricht, die zur Beschreibung der ursprünglichen Variablen nötig ist.

dimensionslose Größen: Kennzahlen oder **PI-Terme**

D.h. nach **PI-Theorem** folgt an



$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-r})$$

I. a. ist $r = 3$ (M, L, T).

Bestimmung der PI-Terme mittels der Methode der wiederkehrenden Variablen.

1. Angabe aller relevanten Var. i. a. gewicht. Daten ($\rightarrow D$), Fluidstaten ($\rightarrow s, z$), äussere Effekte ($\rightarrow s_p$).

Achtg: Var. müssen unabhängig sein ($\rightarrow$ nicht D und H).

6. ... in ...

3. K : # d. Var.

r : # d. Ref. gr.

$\Rightarrow K-r$: # d. Kennzahlen

4. Wahl d. wiederkehrenden Var.,
d. wiederkeh. Var. = # d. Ref. gr.
wiederkeh. Var. besitzen alle
Bezugseinheit;

wiederkeh. Var. müssen immer:
stetig unabhängig sein;

Bemerkung: die wesentliche
zu bestimmende Größe sollte
nicht Teil d. letzte d. wieder-
keh. Var. sein.

5. Bestimmung d. Kennzahl:
multipl. eine nichtwied. Var. mit
den wiederkeh. Var. damit das
Kennzahl dimensionslos ist;
Betrachtung für jede nichtwieder-
kehrende Var.

6. check: kennzahl
dimensionslos?

7. Angabe von

$$\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{K-r})$$

Bemerkung: Bestg. von ϕ
mittels Experiment

Anwendung auf das
Pipeline - Problem

1. $\Delta P_e, D, s, z, \vec{V}$

2. $\Delta P_e \doteq \frac{M}{T^2 L^2}, D \doteq L, s \doteq \frac{M}{L^3},$
 $z \doteq \frac{M}{L T}, \vec{V} \doteq \frac{L}{T}$

3. $K=5, r=3$

$K-r=2$ Kennzahlen

4. wiederkehrende Var. $D, \bar{V}, \bar{V}$

$$5. \quad \pi_1 = \frac{\Delta p_e D^a \bar{V}^b}{S^c}$$

$$M^0 L^0 T^0 = M T^{-2} L^a L^b (L T^{-1})^c (M L^{-3})^c$$

$$M: 0 = 1 + c$$

$$L: 0 = -2 + \underline{a} + \underline{b} - \underline{3c}$$

$$T: 0 = \underline{-2} - \underline{b}$$

$$a = 1, b = -2, c = -1$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta p_e D}{S \bar{V}^2}$$

$$\pi_2 = 2 D^a \bar{V}^b S^c$$

$$M^0 L^0 T^0 = M L^{-1} T^{-1} L^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$M: 0 = 1 + c$$

$$L: 0 = -1 + a + b - 3c$$

$$T: 0 = -1 - b$$

$$a = -1, b = -1, c = -1$$

$$\pi_2 = \frac{2}{D S \bar{V}}$$

6. Check: π_1, π_2 dim. los

7.

$$\frac{\Delta p_e D}{S \bar{V}^2} = \phi \left(\frac{2}{D S \bar{V}} \right)$$

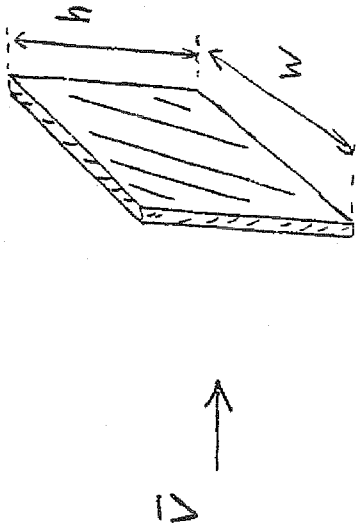
bzw.

Reynolds
Zahl

$$\frac{\Delta p_e D}{S \bar{V}^2} = \phi \left(\frac{S \bar{V} D}{2} \right)$$

ϕ - od. ϕ -Fktn. aus Exp.

Platten - Beispiel:



gesucht: Widerstand $D = f(w, h, v)$
bzw. geeignete Kennzahlen
zur Beschreibung

wiederkkehrende Var.: $g, \bar{v}, w$

$$\pi_1 = D w^a \bar{v}^b g^c$$

$$M^0 L^0 T^0 = M L T^{-2} L^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$M: 0 = 1 + c$$

$$L: 0 = 1 + a + b - 3c$$

$$T: 0 = -2 - b$$

$$a = -2, b = -2, c = -1$$

$$\pi_1 = \frac{D}{g \bar{v}^2 w^2}$$

$$\pi_2 = h w^a \bar{v}^b g^c$$

$$M^0 L^0 T^0 = L L^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= M L T^{-2}, & w &= L, & h &= L, \\ \pi_2 &= M L^{-1} T^{-1}, & g &= M L^{-3}, & \bar{v} &= L T^{-1} \end{aligned}$$

$$k = 6, r = 3$$

$$\Rightarrow \# \text{ d. Kennzahlen } k - r = 3$$

Methode der Differentialgleichungen:

$$M: 0 = C$$

$$L: 0 = 1 + a + b - 3c$$

$$T: 0 = -b$$

$$a = -1, b = 0, c = 0$$

$$\pi_2 = h/w$$

$$\pi_3 = 2 w^a \bar{v}^b g^c$$

$$M^0 L^0 T^0 = M L^{-1} T^{-1} L^a (L T^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$\Rightarrow a = -1, b = -1, c = -1$$

$$\pi_3 = 2 / (w g \bar{v})$$

$$\Rightarrow \frac{\textcircled{1}}{g \bar{v} \textcircled{w}^2} = \phi \left(\frac{w}{h}, \frac{g \bar{v} w}{2} \right)$$

Beschreibung anhand der
2-dim., inkompt. Strömung.

Erhaltungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$g \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$g \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - g \gamma + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Rand- u. Anfangsbedgn. sind
bekannt

Var. d. Problems:

$$u, v, p, x, y, t$$

Referenzgrößen:

$$u_{\infty}, P_{\infty}, \ell, \tau$$

Dimensionslose Var.:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\infty}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\infty}}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_{\infty}},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\ell}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}$$

in DGL einsetzen:

z.Bsp.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u_{\infty} \bar{u})}{\partial x} = \frac{u_{\infty}}{\ell} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = u_{\infty} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\partial u_{\infty}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_{\infty}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} =$$

$$- \frac{P_{\infty}}{\ell} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + 2 u_{\infty} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\left(\frac{\partial u_{\infty}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_{\infty}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} =$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

F_T

F_P

F_G

F_V

F_G

F_V

F_{Ic} : lokale Trägheitskraft / V $\equiv$ Ausdrücke sind ohne Kennzahlen

F_{Ic} : konvektive Trägheitskraft / V

F_p : Druckkraft / V $St = \frac{l}{\tau u_{\infty}}$: Strouhal Zahl
relevant f. instat. Vorgänge;
Verhältnis d. Zeiten l/u_{∞} u. τ

F_g : Gravitationskraft / V

F_v : Reibungskraft / V $St \rightarrow 0$: strög. quasistat.

$Eu = \frac{p_{\infty}}{\rho u_{\infty}^2}$: Euler Zahl
Verhältnis v. Druck - u. Trägheitskraft

$Fr = \frac{u_{\infty}}{\sqrt{g l}}$: Froude Zahl
Verhältnis v. Trägheits- u. Schwerkraften;
relevant bei Fl. Körpern mit freier Oberfläche.

$Re = \frac{\rho u_{\infty} l}{\eta}$: Reynolds Zahl
Verhältnis v. Trägheits- u. Reibkraft

Dimensionenlose Gln.:

Division durch $\bar{F}_{Ic}$ (i. d.)

$$\begin{aligned} \frac{l}{\tau u_{\infty}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \\ - \frac{\rho_{\infty}}{\rho u_{\infty}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta}{\rho u_{\infty} l} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= \\ \frac{l}{\tau u_{\infty}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \\ - \frac{\rho_{\infty}}{\rho u_{\infty}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{g l}{u_{\infty}^2} + \frac{\eta}{\rho u_{\infty} l} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= \end{aligned}$$

weitere physikal. bedeutende Kennzahlen

$$Ma = \frac{u}{c}$$

: Mach Zahl
Verhältnis v. Strögs. und Schallgeschw.

$Ma < 0.4 \rightarrow$ inkompr. Strög.

$$Pr = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$$

: Prandtl Zahl
Verhältnis v. durch Reibg. erzeugter und abgeleiteter Wärme; α : Temp. Leitfähigkeit
Stoffgröße, $Pr = 0.72$ (Luft)

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

: Nusselt Zahl
Verhältnis d. übergehenden zur geleiteten Wärme;
 α : Wärmeübergangszahl

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{\alpha}{\rho c_p u_{\infty}}$$

: Stanton Zahl
Verhältnis d. übergehenden zur konvekt. Transport. Wärme

$$Pe = \frac{\rho u_{\infty} l c_p}{\lambda} = \frac{u_{\infty} l}{\alpha}$$

: Peclet Zahl
Verhältnis d. konvekt. zur geleiteten Wärme

$$Kn = \frac{\bar{c}}{c}$$

: Knudsen Zahl
Verhältnis d. mittl. freien Weglänge zu einer geomet. Länge;

$$Kn \ll 1 \quad \text{Kontinuumsmechanik}$$

$$Kn \gg 1 \quad \text{kinet. Gastheor.}$$

zur Meth. d. Diff. glg.:

Kennzahlen gleich $\Rightarrow$

Lösgn. d. DGLs stimmen überein $\rightarrow$ sog. dyn. Ähnlichkeit

$\Rightarrow$ einfaches Exp. für komplexe Ströme.