....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“

05. 08. 2022

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht:

$F_A = F_G$

$\rho_L\ g\ V_B + \rho_L\ g\ a^3 = \rho_i\ g\ V_B + m_G\ g$

Ideales Gasgesetz:

$\rho = \frac{p}{R\ T}$ mit $p_i = p_a(z)$

Barometrische Höhenformel:

$\frac{p(z)}{p_0} = \frac{\rho(z)}{\rho_0}\ exp(-\frac{g\ z}{R\ T_0})$

Einsetzen:

$g\ \frac{p_0}{R\ T_0}\ exp(-\frac{g\ h}{R\ T_0})(a^3 + V_B(1 - \frac{T_0}{T_i})) = m_G\ g$

$h = \frac{R\ T_0}{g}\ ln(\frac{\rho_0}{m_G}(a^3 + V_B(1 - \frac{T_0}{T_i})))$

b) Kräftegleichgewicht:

$F_A = F_G$

$\rho_0\ g\ V_B + a^3\ g\ \rho_W = \rho_i^*\ g\ V_B + m_G\ g$

Ideales Gasgesetz:

$\rho_i^* = \frac{p_0}{R\ T_i^*}$ mit $p_i^* = p_0$

$\rho_i^* = \rho_0\ \frac{T_0}{T_i^*}$

Einsetzen:

$V_B\ \rho_0\ \frac{T_0}{T_i^*} = \rho_0\ V_B + a^3\ \rho_W - m_G$

$T_i^* = \frac{V_B\ \rho_0\ T_0}{\rho_0\ V_B + a^3\ \rho_W - m_G}$

2. Aufgabe

a) Bernoulli '0'-'K':

$$p_a + \rho g h_0 = p_K + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_K^2$$

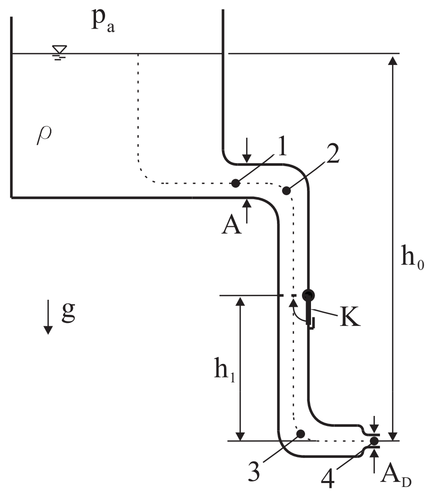
Konti:

$$v_K A = v_D A_D = \sqrt{2gh_0} A_D$$

Bedingung:

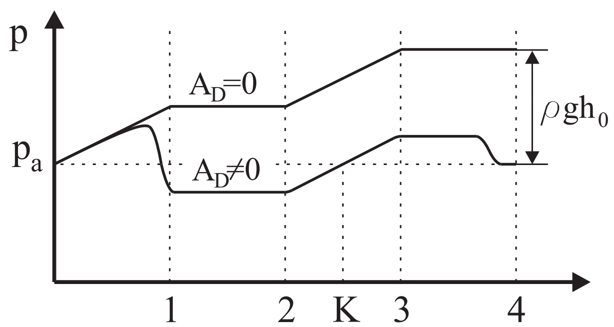
$$p_K = p_a$$

$$\Rightarrow A_D = A\sqrt{1 - \frac{h_1}{h_0}} = \frac{A}{2}$$

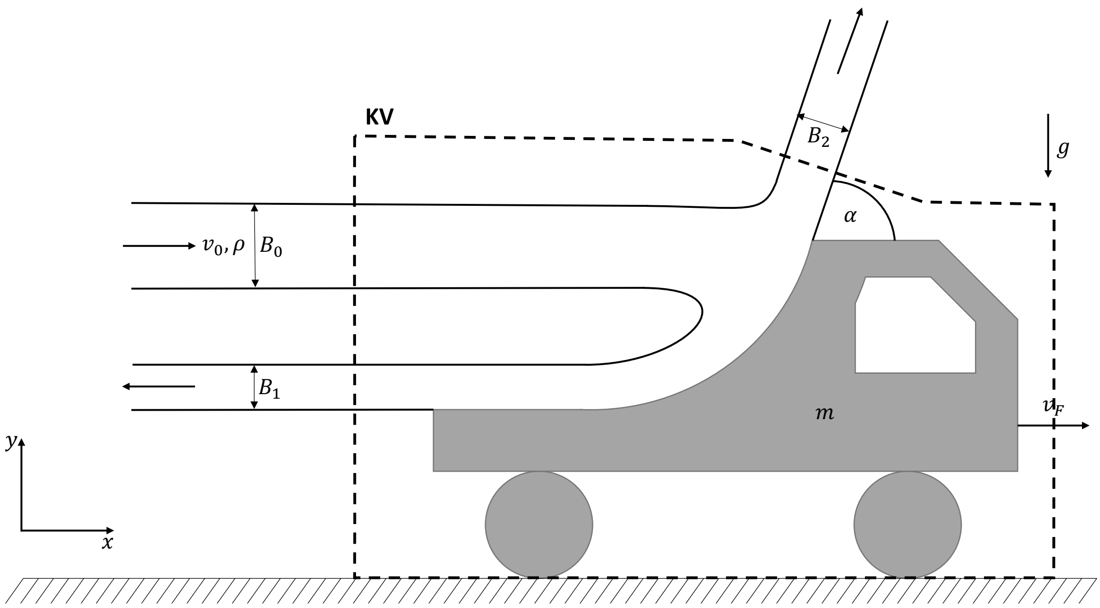


b) $\dot{V} = A_D \sqrt{2gh_0} = \frac{A}{2} \sqrt{2gh_0}$

c)



3. Aufgabe



a) Impulssatz in y-Richtung:

$$\rho\, T\, B_2\, v_{2,rel}^2\, \sin\alpha = F_{ext,y} - m\, g$$

Bernoulli-Gleichung von $0 \rightarrow 1$ bzw. $0 \rightarrow 2$:

$$p_a + \tfrac{\rho}{2} v_{0,rel}^2 = p_a + \tfrac{\rho}{2} v_{1,rel}^2 = p_a + \tfrac{\rho}{2} v_{2,rel}^2$$

Daraus ergibt sich:

$$v_{0,rel} = v_{1,rel} = v_{2,rel}$$

Kontinuitaetsgleichung:

$$v_{0,rel}\, T\, B_0 = v_{1,rel}\, T\, B_1 + v_{2,rel}\, T\, B_2$$

$$B_0 = B_1 + B_2 \rightarrow B_2 = B_0\, \tfrac{1}{1+\Gamma}$$

Einsetzen:

$$F_{ext,y} = \rho\, T\, B_0\, v_{0,rel}^2\, \tfrac{\sin\alpha}{1+\Gamma} + m\, g = \rho\, T\, B_0\, (v_0 - v_F)^2\, \tfrac{\sin\alpha}{1+\Gamma} + m\, g$$

Die Anpresskraft ergibt sich zu:

$$F_{ab} = -F_{ext,y} = -\rho\, T\, B_0\, (v_0 - v_F)^2\, \frac{\sin\alpha}{1+\Gamma} - m\, g$$

b) Impulssatz in x-Richtung:

$$-\rho\, T\, B_0\, v_{0,rel}^2 - \rho\, T\, B_1\, v_{1,rel}^2 + \rho\, T\, B_2\, v_{2,rel}^2 \cos\alpha = F_{ext,x}$$

$$\rho\, T\, B_0\, v_{0,rel}^2\, (-1 - \frac{B_1}{B_0} + \frac{B_2}{B_0}\cos\alpha) = F_{ext,x}$$

$$\rho\, T\, B_0\, v_{0,rel}^2\, (-1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma} + \frac{\cos\alpha}{1+\Gamma}) = F_{ext,x} = -F_{an}$$

$$F_{an} = -\rho\, T\, B_0\, (v_0 - v_F)^2\, (-1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma} + \frac{\cos\alpha}{1+\Gamma})$$

c) Es gilt:

$$F_{an} + F_W = 0$$

Ensetzen ergibt:

$$-\rho\, T\, B_0\, v_{0,rel}^2\, (-1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma} + \frac{\cos\alpha}{1+\Gamma} + C\, \frac{\sin\alpha}{1+\Gamma}) - C\, m\, g = 0$$

$$v_{0,rel} = \pm\sqrt{\frac{C\, m\, g}{\rho\, T\, B_0\, (1+\frac{\Gamma}{1+\Gamma}-\frac{\cos\alpha}{1+\Gamma}-C\, \frac{\sin\alpha}{1+\Gamma})}} = v_0 - v_F$$

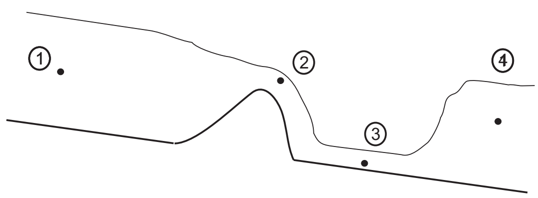
Nur $v_0 > v_F$ physikalisch sinnvoll $\rightarrow +$

$$v_F = v_0 - \sqrt{\frac{C\, m\, g}{\rho\, T\, B_0\, (1+\frac{\Gamma}{1+\Gamma}-\frac{\cos\alpha}{1+\Gamma}-C\, \frac{\sin\alpha}{1+\Gamma})}}$$

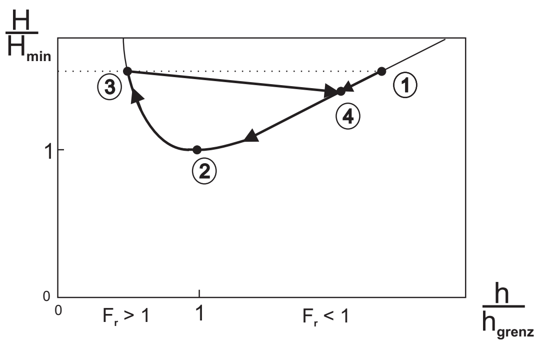
Mit $m = 0$ ergibt sich:

$$v_F^* = v_0$$

4. Aufgabe



a) Zustandsänderungen:



b) Es gilt $H_1 = H_3$, da keine Energiehöhenverluste auftreten

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz}$$

$$\rightarrow \qquad H_3 = z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 {z_1}^2 g}$$

$$H_1 = H_3 \quad \rightarrow \qquad z_1 + \frac{{v_1}^2}{2g} = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 {z_1}^2 g} = z_3 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 {z_3}^2 g}$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g}(\frac{1}{{z_3}^2} - \frac{1}{{z_1}^2})$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g}(\frac{(z_1 + z_3)(z_1 - z_3)}{{z_1}^2 {z_3}^2})$$

$$\rightarrow {z_1}^2 {z_3}^2 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g}(z_1 + z_3)$$

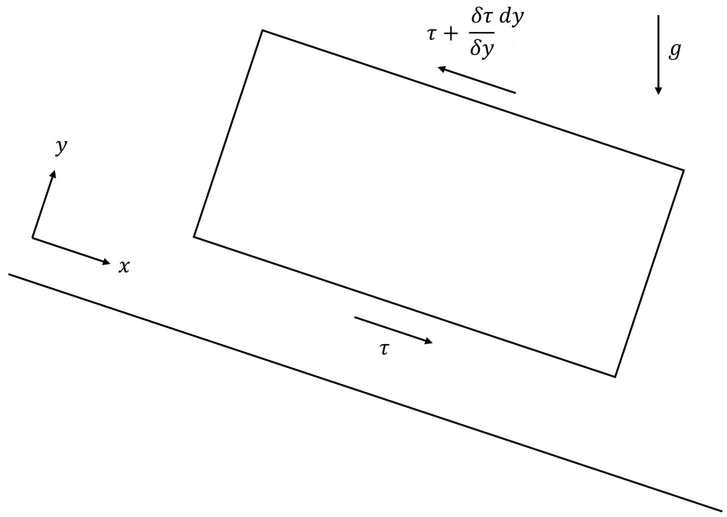
$$\rightarrow {z_3}^2 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2 {z_1}^2 g} z_3 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1 g} = 0$$

$$\rightarrow z_3 = \frac{\dot{V}^2}{4B^2 {z_1}^2 g} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{V}^2}{4B^2 {z_1}^2 g}\right)^2 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1 g}} \qquad \text{(nur pos. Höhen sind sinnvoll} \rightarrow +)$$

$$Fr_3 = \frac{v_3}{\sqrt{g z_3}} \quad \text{mit} \quad v_3 = \frac{\dot{V}}{B z_3} \quad \rightarrow \quad Fr_3 = \frac{\dot{V}}{B\sqrt{g {z_3}^3}}$$

a) Wenn kein Wassersprung auftritt, muss die Energiehöhe konstant bleiben; mit Konti folgt $\rightarrow z_1 = z_4$

5. Aufgabe



a) Mit $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ergibt sich:

$$0 = \tau dxdz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dxdz + \varrho g \sin \alpha dxdydz$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \varrho g \sin \alpha$$

Integration:

$$\tau = \varrho g sin\alpha \cdot y + C_1$$

R.B.: $\tau(y = d) = 0 \Rightarrow C_1 = -\varrho g \sin \alpha d$

$$\Rightarrow \tau(y) = \varrho g(y - d) \sin \alpha$$

Aus Hinweis: $\tau = -K\frac{du}{dy}\left|\frac{du}{dy}\right|^{-\frac{1}{2}}$

die Geschwindigkeit nimmt für $y > 0$ stetig zu $\Rightarrow \frac{du}{dy} > 0$

also:

$$\tau = -K\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dy} = (-\frac{1}{K}\varrho g(y-d))^2 \sin\alpha$$

Integration:

$$u(y) = \int (\frac{\varrho g \sin\alpha}{K}(d-y))^2 dy$$

$$= -\frac{1}{3}(\frac{\varrho g \sin\alpha}{K})^2 (d-y)^3 + C_2$$

R.B.: $u(y=0) = -u_B \Rightarrow C_2 = -u_B + \frac{1}{3}(\frac{\varrho g \sin\alpha}{K})^2 \cdot d^3$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{3}(\frac{\varrho g \sin\alpha}{K})^2 \left[d^3 - (d-y)^3\right] - u_B$$

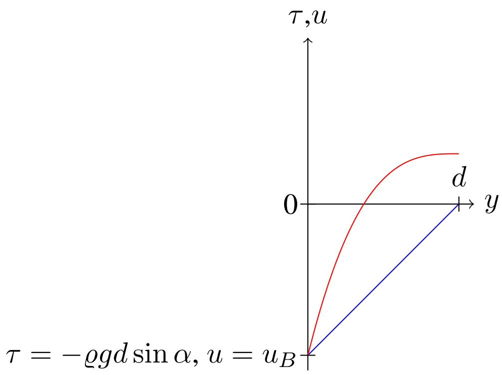
b)

$$\dot{V} = \int\limits_0^d u(y)dy = 0$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{\varrho g \sin\alpha}{K})^2 \left[d^3 y + \frac{1}{4}(d-y)^4\right]_0^d - [u_B y]_0^d$$

$$\Rightarrow u_B = \frac{1}{4}(\frac{\varrho g \sin\alpha}{K})^2 d^3$$

c)

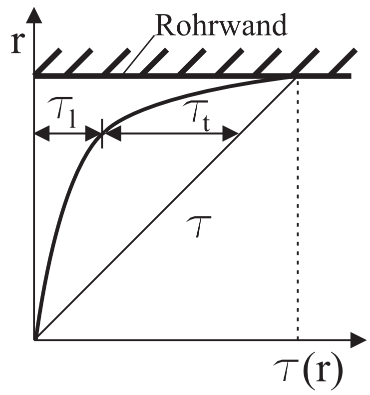


6. Aufgabe

a) Reynoldszahl, mit dem Rohrdurchmesser bzw. den hydraulischen Durchmesser.

$$Re_D = \frac{\varrho u_\infty D}{\eta}$$

b) Skizze



c) Eine Stromlinie ist definiert als:

$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{U_0}{V_0} \frac{e^{-At}}{e^{-Bt}} \frac{y}{H}$

$dx = \frac{U_0}{V_0} \frac{e^{-At}}{e^{-Bt}} \frac{y}{H}\, dy$

$x = \frac{1}{2} \frac{U_0}{V_0}\, e^{(A-B)t} \frac{y^2}{H} + C_1$

Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{A-B}$ gilt $x = 0, y = H$:

$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{U_0}{V_0}\, e^{-1} H$

Einsetzen ergibt

$x = \frac{1}{2} \frac{U_0}{V_0} \frac{1}{e} (\frac{y^2}{H} - H)$

d) $y = \int v(t) dt$

$y = -\frac{V_0}{B}\ e^{-Bt} + C_2$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $x = y = 0$:

$C_2 = \frac{V_0}{B}$

Einsetzen ergibt:

$y = -\frac{V_0}{B}\ (e^{-Bt} - 1)$

Es gilt:

$x = \int u(y,t) dt$

$x = \int U_0\ e^{-At}(-\frac{V_0}{HB}\ (e^{-Bt} - 1))dt$

$x = \int -\frac{U_0 V_0}{HB} e^{-(A+B)t} + \frac{U_0 V_0}{HB} e^{-At} dt$

$x = \frac{U_0 V_0}{B(A+B)} e^{-(A+B)t} - \frac{U_0 V_0}{HBA} e^{-At} + C_3$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $x = y = 0$:

$C_3 = \frac{U_0 V_0}{HB}(\frac{1}{A} - \frac{1}{A+B})$

Einsetzen:

$x = \frac{U_0 V_0}{HB}[\frac{1}{A+B} e^{-(A+B)t} - \frac{1}{A} e^{-At} + (\frac{1}{A} - \frac{1}{A+B})]$