

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor)

28. 02. 2020

1. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned}F_G &= F_A \\ \rho_K V_K g + \rho_P V_P g &= \rho_W V_{ein} g \\ \rho_K \frac{\pi}{6} d_K^3 g + \rho_P L_P b_P d_P g &= \rho_W L_P b_P e_P g \\ e_P &= \frac{\rho_K \frac{\pi}{6} d_K^3 + \rho_P L_P b_P d_P}{\rho_W L_P b_P}\end{aligned}$$

b) Volumen des Wassers:

$$V_W = \pi \frac{D^2}{4} h_1 - L_P b_P e_P$$

Neuer Pegelstand h_2 :

$$\begin{aligned}V_{ges} = V_W + V_K &= \pi \frac{D^2}{4} h_2 \\ \pi \frac{D^2}{4} h_1 - L_P b_P e_P + \frac{\pi}{6} d_K^3 &= \pi \frac{D^2}{4} h_2 \\ h_2 &= \frac{\pi \frac{D^2}{4} h_1 - L_P b_P \frac{\rho_K \frac{\pi}{6} d_K^3 + \rho_P L_P b_P d_P}{\rho_W L_P b_P} + \frac{\pi}{6} d_K^3}{\pi \frac{D^2}{4}}\end{aligned}$$

c) Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}F_G &= F_A + F_W \\ \rho_K \frac{\pi}{6} d_K^3 g &= \rho_W \frac{\pi}{6} d_K^3 g + C_{W,ges} \frac{\rho_W}{2} c^2 \frac{\pi}{4} d_K^2 \\ c^2 &= \frac{\rho_K \frac{\pi}{6} d_K^3 g - \rho_W \frac{\pi}{6} d_K^3 g}{C_{W,ges} \frac{\rho_W}{2} \frac{\pi}{4} d_K^2} \\ c &= \sqrt{\frac{4(\rho_K - \rho_W) d_K g}{3 C_{W,ges} \rho_W}}\end{aligned}$$

d) h_0 bestimmen:

$$\begin{aligned}m_W &= V_W \rho_W \\ \Rightarrow \pi \frac{D^2}{4} h_1 - L_P b_P e_P &= \pi \frac{D^2}{4} h_0 \\ \Rightarrow h_0 &= \frac{\pi \frac{D^2}{4} h_1 - L_P b_P e_P}{\pi \frac{D^2}{4}}\end{aligned}$$

ω bestimmen:

$$\begin{aligned} dp &= \varrho \omega^2 r dr - \varrho g dz \\ \int_{p_a}^p dp &= \int_{r=0}^r \varrho \omega^2 r dr - \int_{z=h}^z \varrho g dz \\ p - p_a &= \varrho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho g(z - h) = \varrho g(h - z) + \frac{1}{2} \varrho \omega^2 r^2 \end{aligned}$$

Betrachtung am Gefäßboden:

$$\begin{aligned} p_a + \varrho g h &= p_a + \varrho g z(r) - \frac{1}{2} \varrho \omega^2 r^2 \\ z(r) &= h + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \\ r &= \frac{D}{2} = H \rightarrow H = h + \frac{\omega^2 (\frac{D}{2})^2}{2g} \\ \rightarrow \omega^2 &= \frac{2(H - h)g}{(\frac{D}{2})^2} \\ z(r) &= h + \frac{2(H - h)gr^2}{(\frac{D}{2})^2 2g} = h + (H - h) \left(\frac{r}{(\frac{D}{2})} \right)^2 \end{aligned}$$

Volumen $V(\omega = 0) = V(\omega)$

$$\begin{aligned} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h_0 &= \int_0^{(\frac{D}{2})} z(r) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{(\frac{D}{2})} \left[h + (H - h) \frac{r^2}{(\frac{D}{2})^2} \right] r dr = \frac{\pi (\frac{D}{2})^2}{2} (h + H) \\ \leftrightarrow h &= 2h_0 - H \\ \rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2(H - 2h_0 + H)g}{(\frac{D}{2})^2}} = \sqrt{\frac{4(H - h_0)g}{(\frac{D}{2})^2}} = \sqrt{\frac{4(H - \frac{\pi \frac{D^2}{4} h_1 - L_P b_P e_P}{\pi \frac{D^2}{4}})g}{(\frac{D}{2})^2}} \end{aligned}$$

2. Aufgabe

a) Konti: $\dot{V}_1 = -uA$ $\dot{V}_2 = uA$

Bernoulli von Ballon 1 zu Ballon 2:

$$p_1 = p_2 + \rho \int_0^L b ds \quad \text{mit} \quad b = \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}$$

$$p_2 - p_1 + \rho \dot{u} L = 0$$

Differenzieren der Bernoulli-Gleichung nach der Zeit:

$$\dot{p}_2 - \dot{p}_1 + \rho L \ddot{u} = 0$$

$$p = p_a + C(V - V_0) \quad \text{und} \quad \dot{p} = C\dot{V}$$

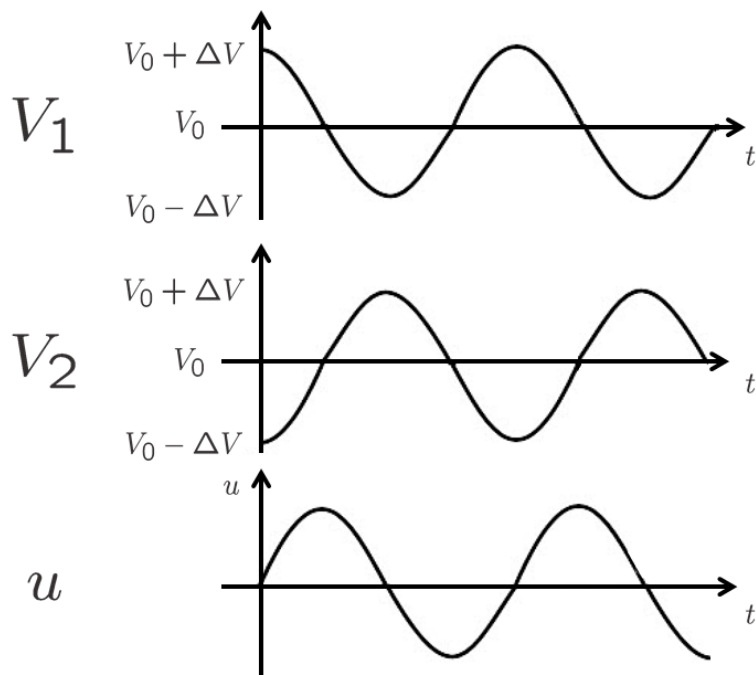
Einsetzen in differenzierte Bernoulli-Gleichung:

$$\rho L \ddot{u} + CuA - (-CuA) = \rho L \ddot{u} + 2CuA = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{2CA}{\rho L} u = 0$$

$$K = \sqrt{\frac{2CA}{\rho L}}$$

b) Skizze:



c) Allgemeine Änderung des Volumens von Ballon 2:

$$V_2(t) = V_0 - \Delta V \cos(Kt)$$

$$\dot{V}_2 = \Delta V k \sin(Kt) = uA$$

$$u(t) = \frac{\Delta V K}{A} \sin(Kt)$$

Maximale Geschwindigkeit für $\sin(Kt) = 1$:

$$u_{max} = \frac{\Delta V K}{A} = \Delta V \sqrt{\frac{2C}{\rho L A}}$$

d) $(p_2 - p_1)_{max} = (\rho L \dot{u})_{max}$

$$\dot{u} = \frac{\Delta V K^2}{A} \cos(Kt)$$

$$\Rightarrow (p_2 - p_1)_{max} = \frac{\rho L \Delta V}{A} K^2$$

$$\Rightarrow (p_2 - p_1)_{max} = \Delta p_{max} = 2\Delta V C$$

3. Aufgabe

a) Kontinuitätsgleichung für beide Gitter

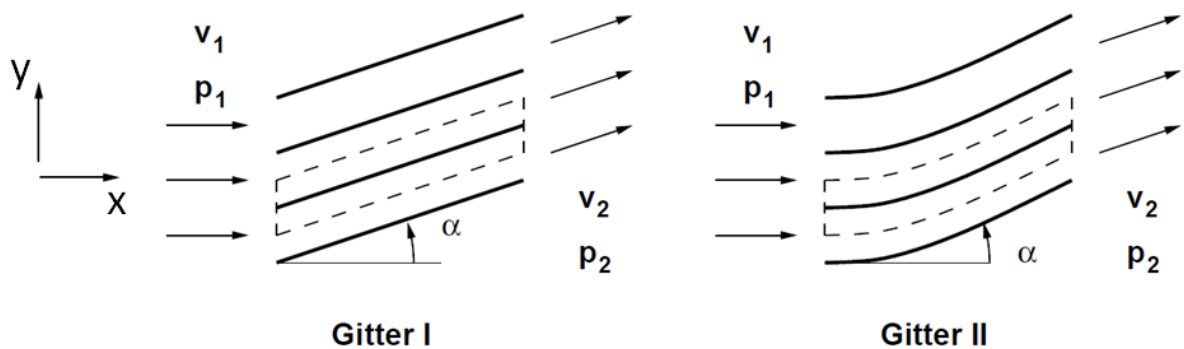
$$v_1 \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n} = v_2 \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n} \cdot \cos \alpha$$

$$v_2 = \frac{v_1}{\cos \alpha}$$

b) Gitter I:

Impulsgleichung in x -Richtung

$$-\varrho \cdot v_1^2 \cdot H \frac{\pi D}{n} + \varrho \cdot (v_2 \cos \alpha)^2 \cdot H \frac{\pi D}{n} = (p_1 - p_2) \cdot H \frac{\pi D}{n} + F_{sx}$$



Impulsgleichung in y -Richtung

$$\varrho \cdot v_2^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n} = F_{sy}$$

Die Kraft steht senkrecht auf der Schaufel

$$\tan \alpha = -\frac{F_{sx}}{F_{sy}}$$

$$p_1 - p_2 = \varrho v_1^2 \tan^2 \alpha$$

Gitter II:

Bernoulli von 1 nach 2:

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \tan^2 \alpha$$

c) Gitter I:

$$p_{01} - p_{02} = p_1 - p_2 + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \varrho v_1^2 \tan^2 \alpha + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)$$

$$p_{01} - p_{02} = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \left(2 \cdot \tan^2 \alpha + 1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \cdot \frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \tan^2 \alpha$$

Gitter II:

$$p_{01} - p_{02} = 0$$

d) Gitter I:

$$F_y = -F_{sy} = -\varrho \cdot v_2^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n} = -\varrho \cdot v_1^2 \cdot \tan \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n}$$

$$F_x = -F_{sx} = \varrho \cdot v_1^2 \cdot \tan^2 \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n}$$

Drehmoment für eine Schaufel:

$$M_1 = F_y \cdot D/2 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot v_1^2 \cdot \tan \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D^2}{n}$$

Drehmoment für n Schaufeln:

$$M = n \cdot M_1 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot v_1^2 \cdot \tan \alpha \cdot H \cdot \pi D^2$$

Gitter II: Impulsgleichung wie bei Gitter I:

$$F_x = -F_{sx} = (p_1 - p_2) \cdot H \frac{\pi D}{n} = \frac{1}{2} \varrho v_1^2 \tan^2 \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n}$$

$$F_y = -F_{sy} = -\varrho v_1^2 \cdot H \cdot \frac{\pi D}{n} \tan \alpha$$

Drehmoment für eine Schaufel:

$$M_1 = F_y \cdot D/2 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot v_1^2 \cdot \tan \alpha \cdot H \cdot \frac{\pi D^2}{n}$$

Drehmoment für n Schaufeln:

$$M = n \cdot M_1 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot v_1^2 \cdot \tan \alpha \cdot H \cdot \pi D^2$$

4. Aufgabe

a) Bernoulli $e - u$:

$$\frac{\rho}{2}u_e^2 + p_a + \rho gh_e = \frac{\rho}{2}u_u^2 + p_u + \rho gH$$
$$\Rightarrow u_u = \sqrt{u_e^2 + \frac{2(p_a - p_u)}{\rho} + 2g(h_e - H)}$$

b) Konti:

$$u_e h_e = u_u H + q_o$$
$$\Rightarrow q_o = u_e h_e - u_u H$$

Hydrostatik:

$$p_o = p_a + \rho g z_o$$
$$\Rightarrow z_o = \frac{p_o - p_a}{\rho g}$$

Gerinne auf U-Boot:

$$H = z_o + \frac{q_o^2}{2gz_o^2} = y_T + H_{min} = y_T + \frac{3}{2} \left(\frac{q_o^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow y_T = z_o + \frac{q_o^2}{2gz_o^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{q_o^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Einsetzen liefert:

$$y_T = \frac{p_o - p_a}{\rho g} + \frac{q_o^2 (\rho g)^2}{2\rho g (p_o - p_a)^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{q_o^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$$
$$y_T = \frac{p_o - p_a}{\rho g} + \frac{(u_e h_e - u_u H)^2 \rho^2 g}{2(p_o - p_a)^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{(u_e h_e - u_u H)^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

5. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht in x -Richtung:

$$\begin{aligned}\sum F = 0 : \quad & -\frac{\partial \tau}{\partial y} dy dx + \rho g \sin \alpha dx dy = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho g \sin \alpha \\ & \Rightarrow \tau = \rho g \sin \alpha \cdot y + C_1\end{aligned}$$

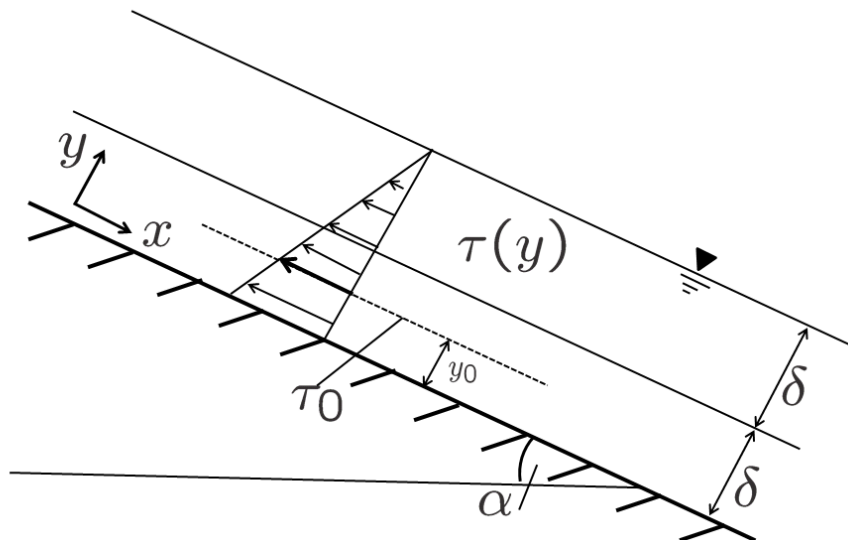
Randbedingung:

$$\begin{aligned}\tau(y = 2\delta) &= 0 \quad \Rightarrow C_1 = -2\delta \rho g \sin \alpha \\ \tau(y) &= -(2\delta - y) \rho g \sin \alpha\end{aligned}$$

Bestimmung von y_0 mit $\tau(y_0) = \tau_0$:

$$\begin{aligned}-(2\delta - y_0) \rho g \sin \alpha &= -\frac{11}{8} \rho g \delta \sin \alpha \\ \Rightarrow y_0 &= -\frac{11}{8} \delta + 2\delta \quad \Rightarrow y_0 = \frac{5}{8} \delta\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für $\frac{5\delta}{8} \leq y \leq \delta$ Festkörperverhalten vorliegt.



Bingham:

$$\begin{aligned}\tau(y) &= \tau_0 - \eta \frac{du}{dy} = -(2\delta - y) \rho g \sin \alpha \quad \text{für } 0 \leq y \leq \frac{5\delta}{8} \\ \Rightarrow u(y) &= \left(\frac{5}{8} \delta y - \frac{y^2}{2}\right) \frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha + C_2\end{aligned}$$

Randbedingung:

$$u(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow u(y) = \left(\frac{5}{8}\delta y - \frac{y^2}{2}\right) \frac{\rho g}{\eta} \sin\alpha$$

Für $\frac{5\delta}{8} \leq y \leq \delta$ ergibt sich somit: $u = u(y = y_0) = \frac{25\rho g}{128\eta} \delta^2 \sin\alpha$

Newton:

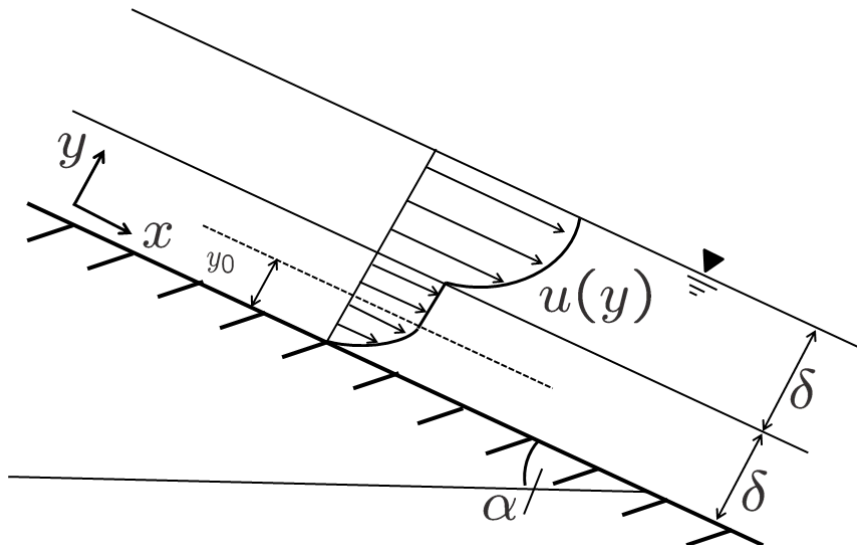
$$\tau(y) = -\eta \frac{du}{dy} = -(2\delta - y)\rho g \sin\alpha \quad \delta \leq y \leq 2\delta$$

$$\Rightarrow u(y) = \left(2\delta y - \frac{y^2}{2}\right) \frac{\rho g}{\eta} \sin\alpha + C_2$$

Randbedingung:

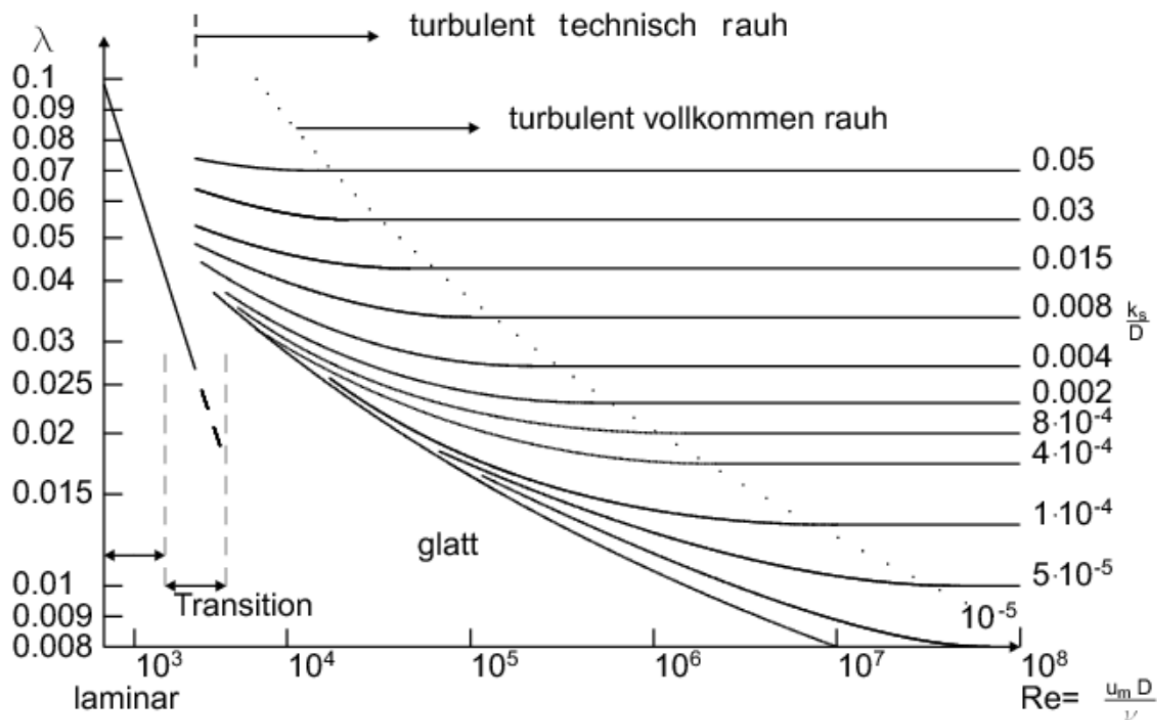
$$u(y = \delta) = \frac{\rho g}{8\eta} \delta^2 \sin\alpha \Rightarrow C_2 = -\frac{167}{128} \frac{\rho g}{\eta} \delta^2 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow u(y) = \left(2\delta y - \frac{y^2}{2} - \frac{167}{128} \delta^2\right) \frac{\rho g}{\eta} \sin\alpha$$



6. Aufgabe

a) Moody-Diagramm:



b) Mit dem Hagen-Poiseuille-Gesetz wird der Volumenstrom einer laminaren Strömung durch ein Rohr mit dem Radius R und der Länge L beschrieben.

c) Gegeben: Geschwindigkeitsverteilung $u(r)$

$$u(r) = \frac{1}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right] (r^2 - R^2) \quad ,$$

Der Volumenstrom $\dot{V}$

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^R u(r) r dr$$

errechnet sich zu

$$\dot{V} = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right] \quad .$$

Formuliert man den Druckgradienten über den Druckabfall entlang der Länge l

$$\frac{\Delta p}{l} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

lautet der Volumenstrom

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left[\frac{\Delta p}{l} + \rho g \sin \alpha \right] \quad ,$$

der für $\alpha = 0$ häufig als Hagen-Poiseuille-Gesetz der Rohrströmung bezeichnet:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

d) Entlang einer Stromlinie, reibungsfrei, stationär, inkompressibel