(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

# Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

12. 08. 2016

1. Aufgabe

a) Gewicht hebt gerade ab:

$$
\begin{aligned}
(m_L + m_G) \cdot g &= F_A = \rho_W g (V_{Ballon} + \underbrace{V_{Gewicht}}_{\approx 0}) \\
V_{Ballon} &= \frac{m_L}{\rho_L} = \frac{m_L}{p_L(H)} R_L T = \frac{m_L}{p_a + \rho_W g H} R_L T \\
\Rightarrow T &= \frac{m_L + m_G}{m_L} \cdot \frac{p_a + \rho_W g H}{\rho_W R_L}
\end{aligned}
$$

b) Ballon schwimmt an der Oberfläche. Nur ein Teil des Volumens erzeugt Auftrieb:

$$
\begin{aligned}
(m_L + m_G) \cdot g &= F_A = \rho_W g (V_{unterhalb} + \underbrace{V_{Gewicht}}_{\approx 0}) + \rho_L g V_{oberhalb} \\
\Rightarrow \underbrace{\frac{m_L}{\rho_L}}_{V} \rho_W &+ V_0 \left(\rho_L - \rho_W\right) = m_L + m_G \\
\Rightarrow \frac{V_0}{V} &= \frac{m_L + m_G - \frac{\rho_W}{\rho_L} m_L}{\left(\rho_L - \rho_W\right) \frac{m_L}{\rho_L}} = \frac{\rho_L \left(m_L + m_G\right) - \rho_W m_L}{\underbrace{\left(\rho_L - \rho_W\right)}_{\approx - \rho_W} m_L} \\
\Rightarrow \frac{V_{oberhalb}}{V_{Ballon}} &= 1 - \frac{\left(m_L + m_G\right)}{m_L} \frac{\rho_L}{\rho_W} = 1 - \frac{m_L + m_G}{m_L} \cdot \frac{p_a}{\rho_W R_L T_{HS}}
\end{aligned}
$$

c) Bewegungsgleichung:

$$
\begin{aligned}
\Sigma F &= (m_L + m_G) \cdot a = (m_L + m_G) \cdot g - \rho_W g (V_{Ballon} + \underbrace{V_{Gewicht}}_{\approx 0}) \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= g - \rho_W \frac{R_L T}{p_a + \rho_W g z} \cdot \frac{m_L g}{m_L + m_G}
\end{aligned}
$$

Nein, denn im Schwebezustand ergibt sich zwar ein Gleichgewicht mit $\tilde{T}$ und $\tilde{z}$. Sobald die Temperatur aber steigt, beschleunigt der Ballon entgegen der z-Richtung, da $V_{Ballon}$ steigt. Anstatt jedoch einen neuen Gleichgewichtszustand einzunehmen, führt eine sinkende Eintauchtiefe $z$ zu einer weiteren Steigerung des Auftriebs, da der Term $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ umgekehrt proportional zu $z$ ist, sodass die Beschleunigung zur Oberfläche sogar zunimmt. Erst dort kann wieder ein Gleichgewicht der Kräfte erreicht werden, indem ein Teil des Ballons aus dem Wasser austritt.

2. Aufgabe

a) Bernoulli vom Wasserspiegel zu Punkt 1:
$p_a + \rho g H = p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$
Am Austritt besitzt die Geschwindigkeit nur eine radiale Komponente:
$v_a = \sqrt{2gh}$

Danach strömt das Fluid in Form eines Freistrahls, sodass nur noch die Erdbeschleunigung darauf wirkt. Dementsprechend ändert sich nur noch die vertikale Geschwindigkeitskomponente. Damit gilt:
$v_{1r} = v_a = \sqrt{2gh}$

Vertikalkomponente: $v_{1z} = -\sqrt{{v_1}^2 - v_{1r}^2} = -\sqrt{2g(H-h)}$
Berechnung von $s_1$:

---

Variante A:
Vertikalgeschwindigkeit in Abhängigkeit von z:
$v_z(z) = -\sqrt{v_1^2(z) - v_{1r}^2} = -\sqrt{2g((H-z)-h)}$
Stromlinie: $\frac{dz}{dr} = \frac{v_{1z}}{v_{1r}} = -\sqrt{\frac{H-h-z}{h}}$
$\Rightarrow \int_R^{s_1} dr = -\sqrt{h}\int_{H-h}^0 \frac{1}{\sqrt{H-h-z}} dz = s_1 - R = \sqrt{4h(H-h-z)}|_{H-h}^0$
$\Rightarrow s_1 = \sqrt{4h(H-h)} + R$

---

Variante B:
$\Delta y = H - h = \frac{1}{2} g t_{Fall}^2 \Rightarrow t_{Fall} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$
$s_1 = v_a \cdot t_{Fall} + R = \sqrt{4h(H-h)} + R$

---

b) Mitdrehendes Bezugssystem, Bernoulli vom Wasserspiegel zu Austritt:
$p_a + \rho g h = p_a + \frac{\rho}{2}{v_{a,rel}}^2 + \rho \int_{WS}^A \vec{b} d\vec{s}$
$\Rightarrow \rho g h = \frac{\rho}{2}{v_{a,rel}}^2 - \rho \int_0^R \omega^2 r dr$
$\Rightarrow \rho g h + \frac{\rho}{2}\omega^2 R^2 = \frac{\rho}{2}{v_{a,rel}}^2$
$\Rightarrow v_{a,rel} = \sqrt{2gh + \omega^2 R^2}$
Radial: $v_{2r} = v_{a,rel} = \sqrt{2gh + \omega^2 R^2}$

Umfangsrichtung: $v_{2\Theta} = \omega R$
Vertikal wie in a): $v_{2z} = -\sqrt{2g(H-h)}$
Berechnung von $s_2$:

---

Variante A:
$\frac{dz}{dr} = \frac{v_{2z}}{v_{2r}} = -\sqrt{\frac{2g(H-h-z)}{2gh+\omega^2 R^2}}$
$\Rightarrow \int_R^{s_{2r}} dr = -\int_{H-h}^0 \sqrt{\frac{2gh+\omega^2R^2}{2g(H-h-z)}} dz = s_{2r} - R = \frac{1}{g}\sqrt{2gh + (\omega R)^2}\sqrt{2g(H-h-z)}|_{H-h}^0$
$\Rightarrow s_{2r} = \sqrt{(4h + \frac{2\omega^2 R^2}{g})(H-h)} + R$

$$\frac{dz}{d(r\Theta)} = \frac{v_{2z}}{v_{2\Theta}} = -\frac{\sqrt{2g(H-h-z)}}{\omega R}$$

$$\Rightarrow \int_0^{s_{2\Theta}} d(r\Theta) = -\frac{\omega R}{\sqrt{2g}} \int_{H-h}^{0} \frac{1}{\sqrt{H-h-z}} dz = s_{2\Theta} = \frac{2\omega R\sqrt{H-h-z}}{\sqrt{2g}}\Big|_{H-h}^{0} = \omega R\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$s_2 = \sqrt{s_{2r}^2 + s_{2\Theta}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\left(4h + \frac{2\omega^2 R^2}{g}\right)(H-h)} + R\right)^2 + 2\omega^2 R^2 \frac{(H-h)}{g}}$$

---

Variante B:

$$s_{2r} = v_{2r} \cdot t_{Fall} + R = \sqrt{\left(4h + 2\frac{\omega^2 R^2}{g}\right)(H-h)} + R$$

$$s_{2\Theta} = v_{2\Theta} \cdot t_{Fall} = \omega R\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$s_2 = \sqrt{s_{2r}^2 + s_{2\Theta}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\left(4h + 2\frac{\omega^2 R^2}{g}\right)(H-h)} + R\right)^2 + 2\omega^2 R^2 \frac{(H-h)}{g}}$$

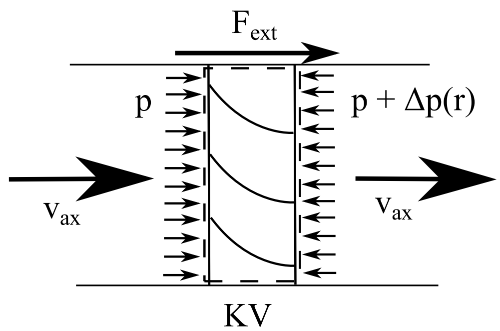
---

**3.Aufgabe**

a) Bernoulli durch den Stator:

$$p_v + \frac{\rho}{2}\left(v_{ax}^2 + v_u^2(r)\right) = p_n + \frac{\rho}{2}v_{ax}^2$$
$$\Rightarrow \Delta p = p_n - p_v = \frac{\rho}{2}v_u^2(r) = \frac{\rho}{2}k_u^2 r^2$$

b) Impulssatz in x-Richtung, KV um Stator:

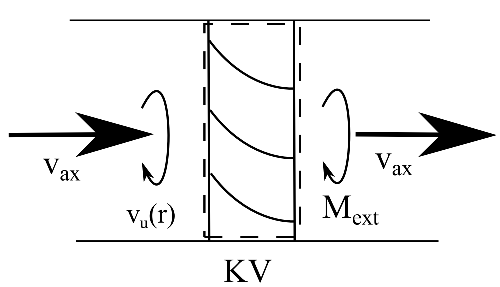



$$\frac{dI}{dt} = \rho \int_{dKV} \underbrace{v_{ax}}_{\substack{R = \text{konst} \\ \rightarrow v_{ax} = \text{konst}}} \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{n})}_{\substack{\text{ein: } -v_{ax} \\ \text{aus: } v_{ax}}} dA = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{m}(v_{ax} - v_{ax}) = 0 &= -\int_{dKV} p\vec{n}dA + F_{ext} = \int_0^R (p_v - p_n)\underbrace{2\pi r dr}_{\text{dA}} + F_{ext} \\
&= -\rho\pi k_u^2 \int_0^R r^3 dr + F_{ext} \\
\Rightarrow F_{ext} &= \frac{\rho}{4}\pi k_u^2 R^4
\end{aligned}$$

Kraft auf das Fluid: $F_{ext}$
$\Rightarrow$ Kraft auf den Stator: $-F_{ext} = -\frac{\rho}{4}\pi k_u^2 R^4$

c) Impulsmomentensatz um die Hauptachse, KV um Stator:




$$\frac{d(\vec{r}\times\vec{J})}{dt} = \rho \int_{dKV} \underbrace{\vec{r}\times\vec{v}}_{\substack{\text{ein: } r v_u(r) \\ \text{aus: } 0}} \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{n})}_{\substack{\text{ein: } -v_{ax} \\ \text{aus: } v_{ax}}} dA$$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{r} \times \vec{J})}{dt} = M_{ext} = -\rho \int_{dKV} r v_u(r) v_{ax} dA = -2\pi\rho v_{ax} k_u \int_0^R r^3 dr$$

$$= -\frac{1}{2}\pi\rho v_{ax} k_u R^4$$

Moment auf das Fluid: $M_{ext}$

$\Rightarrow$ Moment auf den Stator: $-M_{ext} = \frac{1}{2}\pi\rho v_{ax} k_u R^4$

## 4. Aufgabe

a) Minimale Energiehöhe im Grenzzustand: $\frac{dH}{dz} = 0$ mit $H = z + \frac{1}{2g}v^2 = z + \frac{1}{2g}\left(\frac{\dot{V}}{Bz}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dz} = 0 = 1 - \frac{1}{g}\left(\frac{\dot{V}}{B}\right)^2 \frac{1}{z_{GR}^3}$$

$$\Rightarrow z_{GR}^3 = \frac{1}{g}\left(\frac{\dot{V}}{B}\right)^2 \Rightarrow z_{GR} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$$

b) Bernoulli vom Reservoir zur Stelle 0: $Z = z_0 + \frac{1}{2g}\left(\frac{\dot{V}}{Bz_0}\right)^2$

$\dot{V}$ muss berechnet werden. Erhaltungsgleichung zwischen Stelle 0 und Verengung:

$$z_0 + \frac{1}{2g}\left(\frac{\dot{V}}{Bz_0}\right)^2 = 2z_0 + \frac{1}{2g}\left(\frac{\dot{V}}{\frac{1}{\sqrt{2}}B2z_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4g}\left(\frac{\dot{V}}{Bz_0}\right)^2 = z_0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{V}}{Bz_0}\right)^2 = 4gz_0$$

Einsetzen: $Z = z_0 + \frac{1}{2g}(4gz_0) = 3z_0$

c) Vor der Verengung befindet sich das Gerinne in einem überkritischen Zustand:
$\mathrm{Fr}_0 = \frac{v}{\sqrt{gz_0}} = \frac{\dot{V}}{Bz_0\sqrt{gz_0}} = \frac{2\sqrt{gz_0}}{\sqrt{gz_0}} = 2$

Verlauf 1: nur schießend
Verlauf 2: Wassersprung zwischen Verengung und Bodenwelle
Verlauf 3: Wassersprung nach der Bodenwelle
Verlauf 4: wie Verlauf 2 + Übergang zum schießenden Zustand


d) Nach Wassersprung verlustfrei: $H_1 = H_{min} + y_{GR} \Rightarrow y_{GR} = H_1 - H_{min} = H_1 - \frac{3}{2}z_{GR}$

$$H_1 = z_1 + \frac{1}{2g}\left(\frac{\dot{V}}{Bz_1}\right)^2 = z_1 + \frac{1}{2g}\left(\frac{\dot{V}}{Bz_0}\right)^2\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2$$

aus b) $\left(\frac{\dot{V}}{Bz_0}\right)^2 = 4gz_0 \Rightarrow H_1 = z_0\left(\frac{z_1}{z_0}\right) + 2z_0\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2$

$$H_{min} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4z_0^3} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}z_0$$

$$\Rightarrow y_{GR} = z_0\left[\left(\frac{z_1}{z_0}\right) + 2\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 - \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}\right]$$

5. Aufgabe

a) Kräftegleichgewichte:

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &= \pm\rho g dx dy + \tau dx - (\tau + \frac{d\tau}{dy} dy) dx \\ \Rightarrow \text{Schnitt 1:} \quad \frac{d\tau_1}{dy} &= -\rho g \\ \text{Schnitt 2:} \quad \frac{d\tau_2}{dy} &= \rho g \end{aligned}$$

b) Geschwindigkeitsprofile:
Randbedingungen:

$$\tau(y_{1,2} = \delta_{1,2}) = 0$$
$$u(y_{1,2} = 0) = U_{Band}$$

$$\tau = \mp\rho g y_{1,2} + C_1 \text{ mit } \tau = -\eta \frac{du}{dy_{1,2}}$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dy_{1,2}} = \frac{1}{\eta}(\pm\rho g y_{1,2} - C_1)$$
$$u = \frac{1}{\eta}(\pm\rho g \frac{y_{1,2}^2}{2} - C_1 y_{1,2}) + C_2$$

RB für $\tau$:

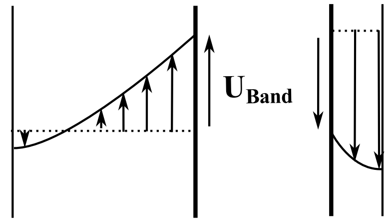
$$\begin{aligned} \text{Schnitt 1:} \quad 0 &= -\rho g \delta_1 + C_1 \\ \Rightarrow C_{1,1} &= \rho g \delta_1 \\ \text{Schnitt 2:} \quad 0 &= \rho g \delta_2 + C_1 \\ \Rightarrow C_{1,2} &= -\rho g \delta_2 \end{aligned}$$

RB für $u$, Schnitte 1 und 2:

$$U_{Band} = u(0) = C_2$$

Geschwindigkeitsprofile:

$$u_1 = \frac{\rho g}{\eta}(\frac{y_1^2}{2} - \delta_1 y_1) + U_{Band}$$
$$u_2 = \frac{\rho g}{\eta}(-\frac{y_2^2}{2} + \delta_2 y_2) + U_{Band}$$




c) Massenerhaltung:

$$
\begin{aligned}
\rho \int_0^{\delta_1} u_1 dy &= \rho \int_0^{\delta_2} u_2 dy \\
\Rightarrow \frac{\rho g}{\eta}\left(\frac{y^3}{6} - \delta_1 \frac{y^2}{2}\right) + U_{Band} y\Big|_0^{\delta_1} &= \frac{\rho g}{\eta}\left(-\frac{y^3}{6} + \delta_2 \frac{y^2}{2}\right) + U_{Band} y\Big|_0^{\delta_2} \\
\Rightarrow \frac{\rho g}{\eta}\left(\frac{\delta_1^3}{6} - \frac{\delta_1^3}{2}\right) + U_{Band}\delta_1 &= \frac{\rho g}{\eta}\left(-\frac{\delta_2^3}{6} + \frac{\delta_2^3}{2}\right) + U_{Band}\delta_2 \\
\Rightarrow -\frac{\rho g}{\eta}\left(\frac{\delta_2^3}{3} + \frac{\delta_1^3}{3}\right) &= U_{Band}(\delta_2 - \delta_1) \\
\Rightarrow -\frac{\rho g}{3\eta}\delta_1^3(n^3+1) &= U_{Band}\delta_1(n-1) \\
\Rightarrow \delta_1 &= \sqrt{\frac{3\eta}{\rho g} \cdot \frac{1-n}{n^3+1} U_{Band}}
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe

a) Die Geschwindigkeit des Bezugsystems sei $\vec{v}_{sys}$.

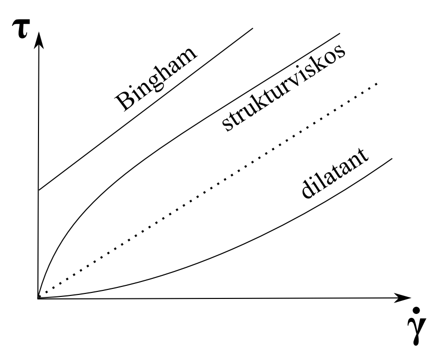
$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \rho \int_{dKV} \vec{v}_{abs} \overbrace{(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n})}^{\text{Der Massenstrom über die Systemgrenzen wird immer durch } \vec{v}_{rel} \text{ ausgedrückt}} dA \\
&= \rho \int_{dKV} (\vec{v}_{rel} + \vec{v}_{sys})(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA \\
&= \rho \int_{dKV} \underbrace{\vec{v}_{sys}}_{\text{konstant}} (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA + \rho \int_{dKV} \vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA \\
&= \rho \vec{v}_{sys} \underbrace{\int_{dKV} (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Kontinuität, daher } = 0} + \rho \int_{dKV} \vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA \\
&= \rho \int_{dKV} \vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) dA
\end{aligned}
$$

b) Die Reynolds'sche Mittelung ist die Aufteilung von Strömungsgrößen in einen zeitlichen Mittelwert und einen Schwankungswert. Die Impulserhaltung ist nicht-linear, sodass die Mittelung die Korrelation der Schwankungsgrößen enthält.

c)

$$
\begin{aligned}
\overline{fg} &= \overline{(\overline{f} + f')(\overline{g} + g')} \\
&= \overline{\overline{f}\overline{g} + \overline{f}g' + \overline{g}f' + f'g'} \\
&= \overline{\overline{f}\overline{g}} + \underbrace{\overline{\overline{f}g'}}_{=0} + \underbrace{\overline{\overline{g}f'}}_{=0} + \overline{f'g'} \\
&= \overline{f}\overline{g} + \overline{f'g'}
\end{aligned}
$$

d) dilatantes Fluid, strukturviskoses Fluid, Bingham-Plastik




e) Unter einer Couette-Strömung versteht man eine stationäre Scherströmung zwischen zwei unendlichen Platten, die relativ zueinander verschoben werden.